

The background of the entire page is a black and white zebra stripe pattern. A large, solid purple rectangular area covers the right two-thirds of the page, serving as a background for the title and author information. The left third of the page is white, featuring a vertical zebra stripe pattern and the publisher's name.

А.Г. Доросинский

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ
ОТ ПРОСТРАНСТВЕННО-
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
ЦЕЛЕЙ В РСА**



Л.Г. Доросинский

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННО-
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЦЕЛЕЙ В РСА**

Ульяновск

2016

УДК 621.312.01(076)

ББК 32.88

Д 40

Рецензенты:

Иванов В.Э. – д.т.н., профессор.

Поршнев С.В. – д.т.н., профессор.

Д 40 Доросинский Л.Г. Введение в теорию обработки сигналов от пространственно-распределённых целей в РСА. – Ульяновск: Зебра, 2016. – 145 с.

Книга посвящена решению теоретических и практических проблем обнаружения, измерения параметров и классификации пространственно-распределённых целей. Подобные проблемы возникают при радиолокационном обзоре земной и водной поверхности с использованием различных радиотехнических систем, и в первую очередь, при обработке сигналов в РЛС с синтезированием апертуры, размещённых на воздушных и космических носителях.

Книга представляет интерес для специалистов, студентов и аспирантов, работающих в области разработки современных радиотехнических систем военного и гражданского назначения.

УДК 621.312.01(076)

ББК 32.88

ISBN 978-5-9908939-5-5

© Доросинский Л.Г., 2016.

© Оформление.

Издательство «Зебра», 2016.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема обнаружения, оценки параметров и классификации пространственно-распределённых целей была и остаётся определяющей при разработке и создании современных радиолокационных систем мониторинга космической, воздушной и наземной обстановки современными и перспективными радиолокационными средствами.

В настоящей работе названная проблема решается, как задача наблюдения наземных и надводных целей космическими системами с высоким разрешением по дальности и азимуту (РЛС с синтезированной апертурой).

В работе приведены основные сведения из области принятия оптимальных решений: метод максимального правдоподобия, параметрический и непараметрический методы оценивания параметров, которые носят общетеоретический характер

Кроме того, получены модели принимаемых сигналов, синтезированы оптимальные и предложены квазиоптимальные (практически реализуемые) алгоритмы обнаружения сигналов от пространственно-распределённых целей, алгоритмы оценивания параметров названных сигналов, а также алгоритмы классификации целей по отражённым сигналам.

В работе получены необходимые выражения для определения эффективности обнаружения, оценивания и классификации и произведены соответствующие вычисления, что позволяет сформулировать практические рекомендации по выбору параметров используемых сигналов.

Каждая глава монографии носит вполне законченный характер и может рассматриваться отдельно от общего текста. В связи с этим библиографический список приводится отдельно к каждой главе работы.

Настоящая монография будет полезна разработчикам и исследователям современных радиолокационных систем различного назначения, предназначенных для эффективной обработки сигналов от пространственно-распределённых целей, а также аспирантам и студентам, изучающим современные радиотехнические системы.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1.1. Проверка простых гипотез

Начнем рассматривать проблему принятия решений с простейшей задачи классификации изображений двух классов, иначе говоря, с предложения о том, что предъявляемое классификатору изображение может относиться к одному из двух отличающихся классов (фотоснимок суши или водной поверхности, мужчины или женщины, розы или гвоздики), которые мы условно будем называть первым (гипотеза H_1) и нулевым (гипотеза H_0). Задача классификатора с минимальной ошибкой принять одно из двух альтернативных решений о наличии изображения первого класса или изображения нулевого класса. Указанное решение должно быть принято в результате анализа принимаемой реализации двумерного случайного поля или (в дискретном варианте) N выборочных значений входного процесса, представляющих собой вектор наблюдаемых данных $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. С каждой из вышеупомянутых гипотез связана многомерная плотность вероятности вектора x при условии истинности первой – $p(\bar{x}/H_1)$ и нулевой – $p(\bar{x}/H_0)$ гипотез. Задача синтеза оптимального алгоритма принятия решения состоит в том, чтобы наилучшим образом, с точки зрения выбранного критерия, использовать имеющуюся информацию для принятия решения в пользу той или иной гипотезы.

Прежде чем приступить к ответу на вопрос о том, как распорядиться наблюдаемыми данными, необходимо рассмотреть различные критерии принятия решения.

1.2. Критерии минимума среднего риска (критерии Байеса)

Постановка нашей задачи предполагает, что верна либо гипотеза H_0 , либо H_1 . При каждом испытании возможен один из четырех исходов:

- 1) Верна гипотеза H_0 , принимаем решение H_0 .
- 2) Верна гипотеза H_0 , принимаем решение H_1 .
- 3) Верна гипотеза H_1 , принимаем решение H_1 .
- 4) Верна гипотеза H_1 , принимаем решение H_0 .

Первый и третий варианты соответствуют истинным решениям, а второй и четвертый – ошибочным.

Смысл описываемого критерия решения состоит в том, что каждому из возможных исходов приписывается некоторая относительная стоимость (штраф), которая выбирается из эвристических соображений. Обозначим стоимости упомянутых выше исходов наблюдения вектора через C_{00} , C_{10} , C_{11} , C_{01} соответственно. Первая цифра подстрочного

индекса означает выбранную гипотезу (принятое решение), а вторая – гипотезу, которая была правильной.

Следующее допущение состоит в том, что каждой из исходных гипотез соответствуют априорные вероятности P_1 и P_0 .

Каждый опыт, связанный с наблюдением реализации входного случайного процесса, будет сопряжен с определенными потерями, оцененными в форме вышеупомянутых стоимостей. Таким образом, стоимость – случайная величина

$C_{ij} \begin{pmatrix} i = 0 \dots 1 \\ j = 0 \dots 1 \end{pmatrix}$, вероятность которой есть вероятность события, заключающегося в том, что принимается i -я гипотеза, а справедлива j -я. Необходимо сформулировать критерии принятия решения таким образом, чтобы минимизировать среднюю величину стоимости, иначе говоря, минимизировать средний риск:

$$R = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} P_{ij}, \quad (1.2.1)$$

где P_{ij} – вероятность совместного выполнения двух событий: принимается решение в пользу i -й гипотезы, а истинной является j -я.

Использование формулы умножения вероятностей позволяет получить выражение

$$P_{ij} = P_j P(H_i / H_j), \quad (1.2.2)$$

где $P(H_i / H_j)$ – условная плотность вероятности принять решение в пользу i -й гипотезы при истинной j -й.

С учетом (1.2.2) запишем выражение среднего риска:

$$R = C_{00}P_0P(H_0 / H_0) + C_{10}P_0P(H_1 / H_0) + C_{01}P_1P(H_0 / H_1) + C_{11}P_1P(H_1 / H_1). \quad (1.2.3)$$

Поскольку мы предполагаем, что в итоге следует выбрать либо H_1 , либо H_0 , правило решения заключается в разбиении пространства наблюдения $\Gamma(\bar{x} \in \Gamma)$ на две части: Γ_1 и Γ_0 (рис. 1.1). Если результат наблюдения вектор \bar{x} оказывается в Γ_0 , то принимается решение в пользу гипотезы H_0 , а если в Γ_1 – то в пользу H_1 .

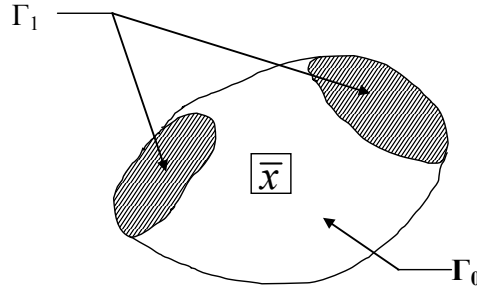


Рис. 1.1 Область решения

Теперь запишем выражение для риска через условные вероятности и подпространства решения:

$$R = C_{00}P_0 \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + C_{10}P_0 \int_{\Gamma_1} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + C_{11}P_1 \int_{\Gamma_1} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} + C_{01}P_1 \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x}. \quad (1.2.4)$$

При записи формулы (1.2.4) учтено, что условная вероятность принятия i -й гипотезы при истинной j -й совпадает с вероятностью попадания вектора \bar{x} , распределенного с плотностью $p(\bar{x} / H_j)$, в подпространство Γ_i пространства Γ ($\Gamma_i \subset \Gamma$).

Далее будем считать, что стоимость ошибочно принятого решения выше, чем стоимость правильного решения, т. е.

$$C_{10} > C_{00}; \quad C_{01} > C_{11}. \quad (1.2.5)$$

Чтобы определить результат байесовского испытания (минимизировать средний риск), следует выбрать подпространства решений Γ_0 и Γ_1 так, чтобы величина (1.2.4) была сведена к минимуму.

Поскольку все пространство Γ есть сумма Γ_0 и Γ_1

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1, \quad (1.2.6)$$

постольку перепишем выражение риска в следующем виде:

$$R = C_{00}P_0 \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + C_{10}P_0 \int_{\Gamma - \Gamma_0} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + C_{11}P_1 \int_{\Gamma - \Gamma_0} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} + C_{01}P_1 \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} \quad (1.2.7)$$

Учитывая условия нормировки

$$\int_{\Gamma} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} = \int_{\Gamma} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} = 1, \quad (1.8)$$

выражение (1.2.7) можно привести к виду

$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \int_{\Gamma_0} [P_1(C_{01} - C_{11})p(\bar{x} / H_1) - P_0(C_{10} - C_{00})p(\bar{x} / H_0)] d\bar{x} \quad (1.9)$$

Первые два члена в (1.2.9) не изменяются, коэффициенты $P_1(C_{01} - C_{11})$ и $P_0(C_{10} - C_{00})$ в силу предположения (1.2.5) положительны. Поэтому для минимизации среднего риска область Γ_0 принятия нулевой гипотезы должна быть выбрана таким образом, что все значения \bar{x} , при которых второй член подынтегрального выражения больше, чем первый, были включены в эту область, т.к. эти значения вектора наблюдаемых данных вносят отрицательный вклад в интеграл и, следовательно, уменьшают средний риск.

Аналогично все значения \bar{x} , когда второй член подынтегрального выражения меньше первого, следует исключить из Γ_0 (отнести к Γ_1), поскольку ими вносится в интеграл положительная величина. Таким образом, области решения определяются следующим условием:

если

$$P_1(C_{01} - C_{11})p(\bar{x} / H_1) > P_0(C_{10} - C_{00})p(\bar{x} / H_0), \quad (1.2.10)$$

то относим \bar{x} к Γ_1 и, следовательно, утверждаем, что истинна гипотеза H_1 ; в противном случае относим \bar{x} к Γ_0 и утверждаем справедливость H_0 . Перепишем формулу (1.2.10) в виде

$$\frac{p(\bar{x} / H_1)}{p(\bar{x} / H_0)} \geq \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})}. \quad (1.2.11)$$

Величину в левой части неравенства (1.2.11) называют отношением правдоподобия и обозначают через $\Lambda(\bar{x})$:

$$\Lambda(\bar{x}) = \frac{p(\bar{x} / H_1)}{p(\bar{x} / H_0)}. \quad (1.2.12)$$

Величина в правой части неравенства (1.2.11) является порогом испытания и обозначается через η :

$$\eta = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})}. \quad (1.2.13)$$

Таким образом, критерий Байеса приводит нас к критерию отношения правдоподобия

$$\Lambda(\bar{x}) \geq \eta \quad (1.2.14)$$

Важно отметить, что необходимые для минимизации среднего риска функциональные преобразования над наблюдаемыми данными заключаются в вычислении $\Lambda(\bar{x})$, а значения априорных вероятностей и стоимостей учитываются только при определении порога. Указанная инвариантность процедуры обработки информации имеет большое практическое значение. Условие (1.2.14) позволяет определить все

устройство обработки, рассматривая η как переменный порог, учитывающий происходящие изменения в наших оценках априорных вероятностей и стоимостей.

Если $\phi[\Delta(\bar{x})]$ – монотонная функция, то эквивалентной формой записи критерия отношения правдоподобия будет

$$\phi[\Delta(\bar{x})] \triangleleft \triangleright .$$

В том случае, когда отношение правдоподобия принадлежит к экспоненциальному семейству функций, в качестве функции ϕ целесообразно выбрать натуральный логарифм:

$$\ln \Delta(\bar{x}) \triangleleft \triangleright .$$

При этом устройство классификации двух изображений существенно упрощается.

1.3. Многоальтернативная проверка гипотез

Рассмотрим процедуру принятия решения при наличии нескольких вариантов: изображения нескольких классов, кодовые комбинации, соответствующие нескольким передаваемым сигналам, дактилоскопические исследования группы людей, распознавание букв русского алфавита и т. п.

Итак, предположим, что имеется M^2 альтернатив, причем каждой из них априори приписывают некоторую стоимость и полагают, что задана система априорных вероятностей P_0, P_1, \dots, P_{M-1} для каждой из M возможных гипотез.

Для отыскания байесовского правила решения обозначим названную выше стоимость каждого образа действий через C_{ij} (i -я гипотеза выбрана в качестве истинной, а j -я гипотеза является истинной на самом деле).

Область пространства, в которой мы выбираем гипотезу H_i , обозначим Γ_i .

Запишем выражение для риска:

$$R = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} P_j C_{ij} \int_{\Gamma_{ii}} p(\bar{x} / H_j) d\bar{x} .$$

Решение будет оптимальным при таком разбиении пространства Γ на M непересекающихся подпространств, чтобы риск был минимален.

Метод решения данной задачи не отличается от предыдущего. Проиллюстрируем обобщение для $M = 3$.

Поскольку области не пересекаются, постольку $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$. Запишем выражение для риска.

$$\begin{aligned}
R = & P_0 C_{00} \int_{\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + P_0 C_{10} \int_{\Gamma_{12}} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + P_0 C_{20} \int_{\Gamma_2} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + \\
& + P_1 C_{01} \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} + P_1 C_{11} \int_{\Gamma - \Gamma_0 - \Gamma_2} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} + P_1 C_{21} \int_{\Gamma_2} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x} + \\
& + P_2 C_{02} \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_2) d\bar{x} + P_2 C_{12} \int_{\Gamma_1} p(\bar{x} / H_2) d\bar{x} + P_2 C_{22} \int_{\Gamma - \Gamma_0 - \Gamma_2} p(\bar{x} / H_2) d\bar{x} = \\
= & P_0 C_{00} + P_1 C_{11} + P_2 C_{22} + \int_{\Gamma_0} [P_1 C_{01} p(\bar{x} / H_1) - P_1 C_{11} p(\bar{x} / H_1) + P_2 C_{02} p(\bar{x} / H_2) - \\
& - P_2 C_{22} p(\bar{x} / H_2)] d\bar{x} + \int_{\Gamma_1} [P_0 C_{10} p(\bar{x} / H_0) - P_0 C_{00} p(\bar{x} / H_0) + P_2 C_{12} p(\bar{x} / H_2) - \\
& - P_2 C_{22} p(\bar{x} / H_2)] d\bar{x} + \int_{\Gamma_2} [P_0 C_{20} p(\bar{x} / H_0) - P_0 C_{00} p(\bar{x} / H_0) + P_1 C_{21} p(\bar{x} / H_1) - P_1 C_{11} p(\bar{x} / H_1)] d\bar{x} .
\end{aligned}
\tag{1.3.1}$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
R = & P_0 C_{00} + P_1 C_{11} + P_2 C_{22} + \int_{\Gamma_0} [P_1 (C_{01} - C_{11}) p(\bar{x} / H_1) + P_2 (C_{02} - C_{22}) p(\bar{x} / H_2)] d\bar{x} + \\
& + \int_{\Gamma_1} [P_0 (C_{10} - C_{00}) p(\bar{x} / H_0) + P_2 (C_{12} - C_{22}) p(\bar{x} / H_2)] d\bar{x} + \\
& + \int_{\Gamma_2} [P_0 (C_{20} - C_{00}) p(\bar{x} / H_0) + P_1 (C_{21} - C_{11}) p(\bar{x} / H_1)] d\bar{x} .
\end{aligned}$$

Решение принимается в пользу той гипотезы, для которой соответствующее подынтегральное выражение в формуле (1.3.1) меньше:

$$\begin{aligned}
P_1 (C_{01} - C_{11}) p(\bar{x} / H_1) + P_2 (C_{02} - C_{22}) p(\bar{x} / H_2) & \triangleleft \triangleup_{H_0 H_1} \dots - C_{00}) p(\bar{x} / H_0) + P_2 (C_{12} - C_{22}) p(\bar{x} / H_2); \\
P_1 (C_{01} - C_{11}) p(\bar{x} / H_1) + P_2 (C_{02} - C_{22}) p(\bar{x} / H_2) & \triangleleft \triangleup_{H_0 H_2} \dots - C_{00}) p(\bar{x} / H_0) + P_1 (C_{21} - C_{11}) p(\bar{x} / H_1); \\
P_0 (C_{10} - C_{00}) p(\bar{x} / H_0) + P_2 (C_{12} - C_{22}) p(\bar{x} / H_2) & \triangleleft \triangleup_{H_1 H_2} \dots - C_{00}) p(\bar{x} / H_0) + P_1 (C_{21} - C_{11}) p(\bar{x} / H_1).
\end{aligned}
\tag{1.3.2}$$

Определим отношение:

$$\Delta_i(\bar{x}) = \frac{p_i(\bar{x})}{p_0(\bar{x})} .
\tag{1.3.3}$$

и перепишем правило решения (1.3.3) в виде:

$$\begin{aligned}
P_1 (C_{01} - C_{11}) \Delta_1(\bar{x}) & \triangleleft \triangleup_{H_0 H_1} \dots - C_{00}) + P_2 (C_{12} - C_{22}) \Delta_2(\bar{x}); \\
P_2 (C_{02} - C_{22}) \Delta_2(\bar{x}) & \triangleleft \triangleup_{H_0 H_2} \dots - C_{00}) + P_1 (C_{21} - C_{11}) \Delta_1(\bar{x}); \\
P_2 (C_{12} - C_{22}) \Delta_2(\bar{x}) & \triangleleft \triangleup_{H_1 H_2} \dots - C_{00}) + P_1 (C_{21} - C_{11}) \Delta_1(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда стоимости ошибочных решений одинаковы и равны единице, а стоимости верных решений считаются равными нулю:

$$C_{ij} = 1 - \delta_{ij}, \quad (1.3.4)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

При этом получаем простое правило решения:

$$\begin{aligned} P_1 \Delta_1(\bar{x}) & \begin{matrix} H_0 & H_1 \\ \triangleleft & \triangleright \end{matrix} \\ P_2 \Delta_2(\bar{x}) & \begin{matrix} H_0 & H_2 \\ \triangleleft & \triangleright \end{matrix} \\ P_2 \Delta_2(\bar{x}) & \begin{matrix} H_1 & H_2 \\ \triangleleft & \triangleright \end{matrix} \end{aligned} .$$

Подставляя (1.3.3) в (1.3.4), приходим к следующему правилу решения:

$$\begin{aligned} P_1 p(\bar{x} / H_1) & \begin{matrix} H_0 & H_1 \\ \triangleleft & \triangleright \end{matrix} / H_0); \\ P_2 p(\bar{x} / H_2) & \begin{matrix} H_0 & H_2 \\ \triangleleft & \triangleright \end{matrix} / H_0); \\ P_2 p(\bar{x} / H_2) & \begin{matrix} H_1 & H_2 \\ \triangleleft & \triangleright \end{matrix} / H_1). \end{aligned}$$

В этом случае оптимальный критерий классификации заключается в формировании апостериорной плотности вероятности для каждого возможного класса и выбора максимума.

Обобщение на случай произвольного числа классов M очевидно.

Решение о выборе номера класса производится путем отыскания максимума апостериорной плотности:

$$\hat{i} = \max_i [P_i p(\bar{x} / H_i)] = \max_i g_i(\bar{x}).$$

1.4. Случай многих классов

Канонической формой классификатора может служить его представление в виде системы разделяющих функций $g_i(\bar{x})$. Классификатор ставит вектор признаков \bar{x} в соответствие гипотезе (классу) H_i , если для всех $j \neq i$ справедливо неравенство

$$g_i(\bar{x}) \triangleright_j .$$

Классификатор, таким образом, рассматривается как устройство, вычисляющее M разделяющих функций и выбирающее решение, соответствующее наибольшей из них.

Очевидно, что выбор разделяющих функций не единственен. Всегда можно, не влияя на решение, умножить разделяющие функции на положительную константу или прибавить к ним какую-либо константу. Более того, если заменить каждую из $g_i(\bar{x})$ на $f(g_i(\bar{x}))$, где $f(\bullet)$ — монотонно возрастающая функция, то результат классификации не изменится. Это обстоятельство может привести к существенным аналитическим и

расчетным упрощениям. В частности, при классификации с минимальным уровнем наиболее удобным на практике вариантом разделяющей функции является

$$g_i(\bar{x}) = \log p(\bar{x} / H_i) + \log P(H_i). \quad (1.4.1)$$

Решающие правила остаются эквивалентными. Действие решающего правила заключается в разбиении пространства признаков \bar{x} на M областей решений $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$. Уравнение границы, разделяющей области Γ_i и Γ_j имеет вид

$$g_i(\bar{x}) = g_j(\bar{x}).$$

1.5. Вероятности ошибок и интегралы ошибок

Рассмотрим случай двух классов. Возможно два типа ошибок классификации:

- вектор наблюдаемых данных попадает в пространство Γ_1 в то время, как истинное состояние природы соответствует гипотезе H_0 ;
- вектор наблюдаемых данных попадает в пространство Γ_0 , хотя истинное состояние природы – H_1 .

В связи с тем, что названные события взаимоисключающие и составляют полное множество событий, вероятность ошибки может быть рассчитана в соответствии с выражением

$$\begin{aligned} P_{\text{ошибки}} &= P(\bar{x} \in \Gamma_1, H_0) + P(\bar{x} \in \Gamma_0, H_1) = \\ &= P(\bar{x} \in \Gamma_1 / H_0) P(H_0) + P(\bar{x} \in \Gamma_0, H_1) P(H_1) = \\ &= P(H_0) \int_{\Gamma_1} p(\bar{x} / H_0) d\bar{x} + P(H_1) \int_{\Gamma_0} p(\bar{x} / H_1) d\bar{x}. \end{aligned}$$

В случае многих классов проще вычислить вероятность правильного решения:

$$\begin{aligned} P_{\text{правильного решения}} &= \sum_{i=1}^M P(\bar{x} \in \Gamma_i, H_i) = \sum_{i=1}^M P(\bar{x} \in \Gamma_i / H_i) P(H_i) = \\ &= P(H_i) \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_i} p(\bar{x} \in \Gamma_i) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Полученный результат справедлив при любом разбиении пространства решений. Разбиение в соответствии с байесовским критерием гарантирует, что полученная вероятность будет максимальной.

1.6. Правило принятия решения при нормальной плотности вероятностей признаков

В соответствии с выражением (1.4.1) структура байесовского алгоритма принятия решения определяется в основном видом условных плотностей

$p(\bar{x} / H_i)$. Из множества различных функций плотности наибольшее значение имеет многомерная нормальная плотность распределения по следующим соображениям.

1. Многочисленные эксперименты и практические исследования говорят о чрезвычайно широком распространении названной плотности во многих практических ситуациях.

2. В силу центральной предельной теоремы при условии, что рассматриваемый признак есть по существу результат сложения большого количества примерно равнозначных явлений (ток – сумма электронов, тепловое движение – сумма перемещений атомов и т. п.), его распределение, по крайней мере в асимптотике, стремится к нормальному.

3. Многомерная нормальная плотность распределения дает подходящую модель для одного важного случая, когда значения векторов признаков x для данного класса представляются непрерывнозначными, слегка искаженными версиями единственного типичного вектора, или вектора-прототипа μ . Именно этого ожидают, когда классификатор выбирается так, чтобы выделять те признаки, которые, будучи различными для образов, принадлежащих различным классам, были бы, возможно, более схожи для образов из одного и того же класса.

4. Немаловажную роль при использовании нормальной плотности играет удобство ее аналитического представления и операций над ней.

Многомерная нормальная плотность распределения в общем виде представляется выражением

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |R|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu})' R^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}) \right], \quad (1.6.1)$$

где \bar{x} – d -компонентный вектор-столбец, $\bar{\mu}$ – d -компонентный вектор среднего значения, R – ковариационная матрица размера $d \times d$, $(\bar{x} - \bar{\mu})^t$ – транспонированный вектор $(\bar{x} - \bar{\mu})$, R^{-1} – матрица, обратная R , а $|R|$ – детерминант матрицы R . Для простоты выражение (1.6.1) часто записывается сокращенно в виде $p(x) \sim N(\bar{\mu}, R)$.

Вектор $\bar{\mu} = M[\bar{x}]$ представляет собой вектор математических ожиданий вектора \bar{x} , а матрица $R = M[(\bar{x} - \bar{\mu})(\bar{x} - \bar{\mu})^t]$ – матрицу ковариаций вектора \bar{x} , ($M[\]$ – операция вычисления математического ожидания).

Ковариационная матрица R всегда симметрична и положительно полуопределена. Ограничимся рассмотрением случаев, когда R положительно определена, так что ее детерминант строго положителен. Диагональный элемент матрицы R представляет собой дисперсию $R_{ii} = \sigma_{ii}$, а недиагональный элемент R_{ij} есть ковариация x_i и x_j . Если x_i и x_j

статистически независимы, то $R_{ij} = 0$. Если все недиагональные элементы равны нулю, то $p(\bar{x})$ сводится к произведению одномерных плотностей компонент вектора \bar{x} .

Многомерная нормальная плотность распределения полностью определяется $d+d(d+1)/2$ параметрами — элементами вектора среднего значения $\bar{\mu}$ и независимыми элементами ковариационной матрицы R . Выборки нормально распределенной случайной величины имеют тенденцию попадать в одну область или кластер. Центр кластера определяется вектором среднего значения, а форма — ковариационной матрицей. Из соотношения (1.6.1) следует, что точки постоянной плотности образуют гиперэллипсоиды, для которых квадратичная форма $(\bar{x} - \bar{\mu})' R^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu})$ постоянна. Главные оси этих гиперэллипсоидов задаются собственными векторами R , причем длины осей определяются собственными значениями. Величину

$$r^2 = (\bar{x} - \bar{\mu})' R^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu})$$

называют квадратичным махаланобисовым расстоянием от \bar{x} до $\bar{\mu}$. Линии постоянной плотности, таким образом, представляют собой гиперэллипсоиды постоянного махаланобисова расстояния $\bar{\mu}$. Объем этих гиперэллипсоидов служит мерой разброса выборок относительно среднего значения.

Как мы показали выше, классификация с минимальным уровнем ошибки может осуществляться посредством разделяющих функций вида

$$g_i(\bar{x}) = \log p(\bar{x}/H_i) + \log P(H_i).$$

Когда многомерная плотность $p(\bar{x}/H_i)$ нормальна, согласно выражению (1.6.1) получаем

$$g_i(\bar{x}) = -\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu}_i)' R_i^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}_i) - \frac{1}{2} \log |R_i| + \log P(H_i). \quad (1.6.2)$$

Последнее слагаемое определяется априорными вероятностями гипотез. Мы его учитывать не будем, т.к. названное слагаемое может быть добавлено на любом этапе работы алгоритма.

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Признаки статистически независимы и имеют одинаковую дисперсию

$R = \sigma^2 E$, где E — единичная матрица.

В этом случае разделяющая функция сводится к вычислению евклидова расстояния между вектором признаков и каждым вектором математических решений. Решение выбирается в пользу той гипотезы, для которой названное расстояние минимально.

$$\hat{i} = \frac{1}{2\sigma^2} \min \| \bar{x} - \bar{\mu}_i \|^2, \quad (1.6.3)$$

где

$$\| \bar{x} - \bar{\mu}_i \|^2 = (\bar{x} - \bar{\mu}_i)' (\bar{x} - \bar{\mu}_i) = \sum_{k=1}^d (x_k - \mu_i^k)^2. \quad (1.6.4)$$

Такой классификатор называют классификатором по минимуму расстояния. Если каждый из векторов средних значений считать идеальным прототипом или эталоном для образов своего класса, то это по существу будет процедура сравнения с эталоном.

Если априорные вероятности не равны, то, согласно соотношениям (1.6.2) и (1.6.3), квадрат расстояния (1.6.4) должен быть нормирован по дисперсии (поделен на $2\sigma^2$) и смещен на величину $\log P(H_i)$; поэтому в случае, когда вектор \bar{x} одинаково близок к двум различным векторам средних значений, при принятии решения следует предпочесть класс, априори более вероятный.

Произведя перемножение в формуле (1.6.2) и отбросив одинаковое для всех i слагаемое, приходим к линейной разделяющей функции:

$$g_i(\bar{x}) = \bar{w}_i' \bar{x} + w_{i0}, \quad (1.6.5)$$

где

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\sigma^2} \bar{\mu}_i;$$

$$w_{i0} = -\frac{1}{2\sigma^2} \bar{\mu}_i' \bar{\mu}_i + \log P(H_i).$$

Классификатор, основанный на использовании линейных разделяющих функций, называется линейной машиной.

2. Ковариационные матрицы для всех классов одинаковы. $R_i = R$.

Это соответствует ситуации, при которой выборки попадают внутрь гиперэллипсоидальных областей (кластеров) одинаковых размеров и формы, с вектором средних значений в центре каждой.

После того как мы пренебрегаем не зависящими от i слагаемыми, получаем разделяющие функции вида

$$g_i(\bar{x}) = -\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu}_i)' R^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}_i) + \log P(H_i). \quad (1.6.6)$$

Если априорные вероятности для всех M классов равны, то последним слагаемым в формуле (1.6.6) можно пренебречь. Оптимальное решающее правило в таком случае снова оказывается очень простым: для классификации вектора признаков следует определить квадратичное махаланобисово расстояние от \bar{x} до каждого из M векторов средних значений и отнести \bar{x} к классу, соответствующему ближайшему среднему значению. Как

и прежде, в случае неравных априорных вероятностей, при принятии решения несколько большее предпочтение отдается классу, априори более вероятному.

После раскрытия квадратичной формы и отбрасывания слагаемых, не изменяющихся при разных значениях i , получаем выражения:

$$g_i(\bar{x}) = \bar{w}_i' \bar{x} + w_{i0}; \quad (1.6.7)$$

$$\bar{w}_i = R^{-1} \bar{\mu}_i;$$

$$w_{i0} = -\frac{1}{2} \bar{\mu}_i' R^{-1} \bar{\mu}_i + \log P(H_i).$$

3. Произвольные корреляционные матрицы R_i .

В общем случае многомерного нормального распределения ковариационные матрицы для каждого класса разные. В этом случае разделяющие функции получаются квадратичными:

$$g_i(\bar{x}) = \bar{x}' W_i \bar{x} + \bar{w}_i' \bar{x} + w_{i0}, \quad (1.6.8)$$

где

$$W_i = -\frac{1}{2} R_i^{-1};$$

$$\bar{w}_i = R_i^{-1} \bar{\mu}_i;$$

$$w_{i0} = -\frac{1}{2} \bar{\mu}_i' R_i^{-1} \bar{\mu}_i - \frac{1}{2} \log |R_i| + \log P(H_i).$$

Таким образом, в зависимости от ситуации (независимые признаки, одинаковые ковариационные матрицы, различающиеся ковариационные матрицы) решение принимается в пользу той гипотезы, для которой выражение решающей функции (1.6.4), (1.6.7) и (1.6.8) соответственно максимально.

1.7. Оценка параметров по максимуму правдоподобия. Обучение с учителем

В практических условиях апостериорные плотности вероятностей $P(H_i/\bar{x})$, как правило, либо неизвестны вообще, либо известны с точностью до ряда параметров. В то же время обычно имеется набор так называемых обучающих выборок, достоверно принадлежащих каждому из распознаваемых классов. Число этих выборок зачастую достаточно мало, чтобы вынести решение о функциональном виде требуемых плотностей вероятностей, но достаточно велико для построения оценок параметров названных плотностей, если их функциональный вид предполагается известным.

Допустим, что есть основания предполагать, что плотность вероятности $p(\bar{x}/H_i)$ имеет нормальное распределение со средним значением $\bar{\mu}_i$ и ковариационной матрицей R_i , хотя точные значения названных величин точно неизвестны.

В этом случае решение принимается в соответствии с теми же принципами и правилами, что и в разделе 1.6, где в формулы (1.6.5), (1.6.6) и (1.6.8) подставляются не точно известные значения $\bar{\mu}_i$ и R_i , а их оптимальные в каком-то смысле оценки. Среди таких оценок наилучшими в практических ситуациях свойствами обладают оценки, полученные по методу максимального правдоподобия.

Рассмотрим оценку по методу максимального правдоподобия. Предположим, что множество имеющихся обучающих выборок разбито на M классов X_1, X_2, \dots, X_M , причем выборки в каждом X_i статистически независимы и имеют плотность распределения $p(\bar{x}/H_i)$. Будем считать, что плотность $p(\bar{x}/H_i)$ задана в параметрической форме, т. е. известно ее аналитическое выражение с точностью до неизвестного векторного параметра Θ . Например, нам известно, что выборки подчиняются нормальному закону распределения с неизвестным вектором математических ожиданий $\bar{\mu}_i$ и ковариационной матрицей R_i . В этом случае компоненты вектора Θ составлены из компонент $\bar{\mu}_i$ и R_i .

Для того чтобы в явном виде показать зависимость от неизвестных параметров, запишем плотность вероятностей в виде $p(\bar{x}/H_i, \Theta_i)$. Задача оценки неизвестных параметров заключается в определении их величин по наблюдаемым данным наилучшим образом.

Будем считать, что выборки, принадлежащие наблюдаемым данным X_i , не содержат информации о векторе параметров Θ_j , т. е. предполагается функциональная независимость параметров, принадлежащих разным классам. Последнее обстоятельство дает возможность рассматривать отдельно каждый класс.

Пусть X содержит n выборок $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$. Так как выборки получены независимо, имеем:

$$p(\bar{x} / \Theta) = \prod_{k=1}^n p(x_k / \Theta). \quad (1.7.1)$$

Рассматриваемая как функция от Θ плотность $p(\bar{x}/\Theta)$ называется функцией правдоподобия. Оценка по максимуму правдоподобия величины Θ есть такая величина $\hat{\Theta}$, при которой выражение (1.7.1) максимально.

На практике эквивалентным, но более простым по своим вычислениям является отыскание максимума не собственно плотности вероятности, а ее логарифма. Если ввести оператор градиента:

$$\Delta_{\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \Theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \Theta_p} \end{bmatrix},$$

где p – размерность вектора параметров и обозначить функцию логарифма правдоподобия:

$$l(\Theta) = \log p(\bar{x} / \Theta),$$

то оптимальная оценка вектора параметров Θ может быть получена из решения уравнения:

$$\Delta_{\Theta}(l) = \sum_{k=1}^n \Delta_{\Theta} \log p(x_k / \Theta).$$

Применим полученные результаты для многомерного нормального распределения. Начнем со случая, когда неизвестно только среднее значение. Запишем выражение для логарифма функции правдоподобия и оператора градиента:

$$\begin{aligned} \log p(x_k / \mu) &= -\frac{1}{2} \log \{(2\pi)^d |R|\} - \frac{1}{2} (x_k - \mu)^t R^{-1} (x_k - \mu); \\ \Delta_{\mu} \log p(x_k / \mu) &= R^{-1} (x_k - \mu). \end{aligned}$$

С учетом (1.7.1) получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^n R^{-1} (x_k - \hat{\mu}) = 0,$$

из которого следует:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (1.7.2)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что оценка по максимуму правдоподобия равна среднему арифметическому выборок. Для ковариационной функции аналогичным образом может быть получена ее оценка по максимуму правдоподобия, которая имеет вид:

$$\hat{R} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{\mu})(x_k - \hat{\mu})^t. \quad (1.7.3)$$

Полученные результаты (1.7.2) и (1.7.3) представляются совершенно естественными и интуитивно понятными.

В результате процедура классификации выглядит следующим образом.

1. Этап обучения. По обучающим выборкам строятся оценки математических ожиданий и ковариационных функций (формулы (1.7.2) и (1.7.3)) для каждой из M конкурирующих гипотез.
2. Далее вычисляются M решающих функций (формулы (1.6.5), (1.6.7), (1.6.8)).
3. Решение принимается в пользу той гипотезы, для которой решающая функция максимальна.

Рассматриваемые решающие функции, основанные на вычислении взвешенных расстояний между наблюдаемым вектором признаков и вектором математических ожиданий, полученным на этапе обучения, дают хорошие результаты в случае, когда вектор признаков имеет нормальное или близкое к нему распределение.

1.8. Байесовский классификатор

Из курса математической статистики известно, что оценка по максимуму правдоподобия для ковариационной матрицы смещена, т. е. ожидаемое значение \hat{R} не равно R . Несмещенная оценка для R задается выборочной ковариационной матрицей

$$\hat{R} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{\mu})(x_k - \hat{\mu})^t. \quad (1.8.1)$$

Очевидно, что оценки (1.7.3) и (1.8.1), совпадают при большом n .

Наличие двух сходных и тем не менее разных оценок для ковариационной матрицы смущает многих исследователей, т.к. возникает вопрос: какая же из них “верная”? Ответить на это можно, сказав, что каждая из этих оценок ни верна, ни ложна: они просто различны. Наличие двух различных оценок показывает, что единой оценки, включающей все свойства, которые только можно пожелать, не существует. Для наших целей сформулировать наиболее желательные свойства довольно сложно — нам нужна такая оценка, которая позволила бы наилучшим образом проводить классификацию. Хотя разрабатывать классификатор, используя оценки по максимуму правдоподобия для неизвестных параметров, обычно представляется разумным и логичным, вполне естествен вопрос, а нет ли других оценок, обеспечивающих еще лучшее качество работы. В данном разделе мы рассмотрим этот вопрос с байесовской точки зрения.

Сущность байесовской классификации заложена в расчете апостериорной вероятности $P(H/\bar{x})$. Байесовское правило позволяет вычислить эти вероятности по

априорным вероятностям $P(H_i)$ и условным по классу вероятностям $p(\bar{x}/H_i)$. Однако возникает вопрос: как быть, если названные вероятности неизвестны. Для ответа на него мы должны вычислить $P(H_i/\bar{x})$, максимально используя всю информацию, которая есть в нашем распоряжении. Часть такой информации может быть априорной, часть содержаться в множестве выборок. Пусть X означает множество выборок. Применив формулу Байеса, получим апостериорную плотность вероятности

$$P(H_i / \bar{x}, X) = \frac{p(\bar{x} / H_i, X)P(H_i)}{\sum_{j=1}^M p(\bar{x} / H_j, X)P(H_j)}. \quad (1.8.2)$$

В данном выражения мы считаем, что значения априорных вероятностей известны и не зависят от выборок X . Кроме того, предполагаем, что выборки можно разделить по классам на M подмножеств: X_1, X_2, \dots, X_M , причем выборки X_i принадлежат H_i и не оказывают влияния на все $p(\bar{x}/H_i, X)$, если $i \neq j$. Принятые предположения позволяют записать уравнение (1.8.2) в виде

$$P(H_i / \bar{x}, X) = \frac{p(\bar{x} / H_i, X_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^M p(\bar{x} / H_j, X_j)P(H_j)}. \quad (1.8.3)$$

Для принятия решения по правилу (1.8.3), например, путем выбора максимума, мы должны решить M задач оценки M плотностей вероятностей $p(\bar{x}/X_i)$ по M обучающим выборкам.

Для примера решим задачу оценки неизвестного вектора средних значений $\bar{\mu}$. Начнем анализ с одномерного случая, когда $p(x/\mu)$ представляет собой нормальное распределение с математическим ожиданием, равным μ и дисперсией σ^2 и общее число выборок равно n : $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Предположим, что априорные сведения о среднем значении μ исчерпываются известной априорной плотностью, которая также считается нормальной с математическим ожиданием μ_0 и дисперсией σ_0^2 .

Для определения среднего значения воспользуемся байесовским правилом. Апостериорная плотность параметра имеет вид

$$p(\mu / X) = \frac{p(X / \mu)p(\mu)}{\int p(X / \mu)p(\mu)d\mu} = \alpha \prod_{k=1}^n p(X_k / \mu)p(\mu), \quad (1.8.4)$$

где α - масштабный множитель, не зависящий от μ .

Подставляя в выражение (1.8.4) соответствующие нормальные плотности вероятностей, получаем:

$$\begin{aligned}
 p(\mu / X) &= \alpha \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu}{\sigma}\right)^2\right] * \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right] = \\
 &= \alpha' \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu - x_k}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right\}\right] = \\
 &= \alpha'' \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\mu^2 - 2\left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\mu\right\}\right].
 \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

В выражении (1.8.5) множители, не зависящие от μ , включены в константы α' и α'' .

Из (1.8.5) также следует, что плотность $p(\mu/X)$ является нормальной. Обозначим параметры полученной нормальной плотности, как μ_n и σ_n^2 , которые могут быть получены приравниваем коэффициентов из выражения (1.8.5) соответствующим коэффициентам из выражения

$$p(\mu / Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right].$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}$$

и

$$\frac{\mu_n}{\sigma_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}.$$

Решая уравнения в явном виде, получаем

$$\mu_n = \frac{n\sigma_0^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2} m_n + \frac{\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2} \mu_0, \tag{1.8.6}$$

где m_n – выборочное среднее,

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}$$

σ_n^2 – выборочная дисперсия.

Из уравнения (1.8.6) видно, что оптимальная оценка математического ожидания апостериорной плотности представляет собой линейную комбинацию априорного математического ожидания μ_0 и выборочного среднего m_n , полученного по n выборкам. Коэффициенты перед этими величинами неотрицательны и в сумме равны единице.

Если достоверность априорных данных очень высока ($\sigma_0^2 \cong 0$), то в качестве оценки следует использовать априорное математическое ожидание μ_0 . Это говорит о том, что никакое число измерений не может поколебать нас в уверенности в априорных данных.

При альтернативной ситуации ($\sigma_0^2 \neq 0$, а число наблюдений стремится к бесконечности: $n \rightarrow \infty$, $\frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$) в качестве оценки следует использовать выборочное среднее m_n , не доверяя, в свою очередь, априорным сведениям. Вообще относительный баланс между априорными представлениями и опытными данными определяется отношением σ^2 к σ_0^2 , называемым иногда догматизмом. Если догматизм не бесконечен, то после получения достаточного числа выборок априорные данные перестают играть сколько-нибудь заметную роль, а оценка стремится к выборочному среднему.

После получения апостериорной плотности $p(\mu/X)$ остается определить «условную по классу» плотность $p(x/X)$ (в данном выводе мы полагаем, что все выборки принадлежат одному, например, j -му классу с априорной плотностью $p(H_j)$). Для определения требуемой плотности вычислим

$$\begin{aligned} p(x/X) &= \int p(x/\mu) p(\mu/X) d\mu = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right] d\mu = \\ &= f(\sigma, \sigma_n) \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_n)^2}{\sigma^2 + \sigma_n^2}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что плотность $p(\bar{x}/X)$ является нормальной со средним значением, равным μ_n , и дисперсией $\sigma^2 + \sigma_n^2$.

Для получения байесовского решения полученную плотность для каждого j -го класса следует умножить на априорную вероятность этого класса и выбрать максимальное значение

$$\hat{j}_{onm} = \max_j p(H_j/x, X_j) = \max_j \frac{p(x/H_j, X_j) P(H_j)}{\sum_{j=1}^M p(x/H_j, X_j) P(H_j)}.$$

1.9. Эффективность оценки. Нижняя граница дисперсии несмещенной оценки. Неравенство Крамера-Рао

Предположим, что мы производим оценку неизвестного неслучайного параметра Θ и в результате измерений получаем так называемую несмещенную оценку, т. е. такую оценку, математическое ожидание которой равняется значению самого оцениваемого параметра, т. е. $M[\hat{\Theta}] = \Theta$. Для того чтобы определить качество оценки, следует определить ее дисперсию, которая вычисляется следующим образом:

$$\sigma^2[\hat{\Theta}(x) - \Theta] = M \left\{ \left[\hat{\Theta}(x) - \Theta \right]^2 \right\}.$$

Дисперсия дает меру рассеяния ошибки. Наилучшей оценкой была бы, по-видимому, несмещенная оценка с минимальной дисперсией. Однако регулярной процедуры, которая бы приводила к получению алгоритма, формирующего несмещенную оценку с минимально возможной дисперсией, не существует.

В этой ситуации имеет смысл получить выражение для нижней границы дисперсии любой несмещенной оценки. Знание границы позволит сравнить дисперсию той или иной оценки с этой границей, и в том случае, если будет получено совпадение дисперсии оценки с нижней границей, может быть сделан вывод, что мы получили наилучшую оценку. Если же точное совпадение не обеспечено, то и в этом случае мы можем судить, насколько наша оценка отличается от потенциально достижимой.

Докажем следующее утверждение. Если $\hat{\Theta}(x)$ – любая несмещенная оценка величины Θ , то

$$\sigma^2[\hat{\Theta}(x) - \Theta] \geq \left(M \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} \right]^2 \right\} \right)^{-1} \quad (1.9.1)$$

или, что эквивалентно,

$$\sigma^2[\hat{\Theta}(x) - \Theta] \geq \left\{ -M \left[\frac{\partial^2 \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (1.9.2)$$

При этом мы считаем, что производные

$$\frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta^2}$$

существуют и являются абсолютно интегрируемы.

Неравенства (1.9.1) и (1.9.2) обычно называются границами Крамера-Рао. Любая оценка, удовлетворяющая указанной границе со знаком равенства, называется эффективной оценкой.

Доказательство этого положения основано на использовании неравенства Буняковского-Шварца. Так как по нашему предположению оценка считается несмещенной, запишем

$$M[\hat{\Theta}(x) - \Theta] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x/\Theta) [\hat{\Theta}(x) - \Theta] dx = 0. \quad (1.9.3)$$

Дифференцируя обе части по Θ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} p(x/\Theta) [\hat{\Theta}(x) - \Theta] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Theta} \{p(x/\Theta) [\hat{\Theta}(x) - \Theta]\} dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} p(x/\Theta) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp(x/\Theta)}{d\Theta} [\hat{\Theta}(x) - \Theta] dx = 0. \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Первый интеграл равен 1. Кроме того, заметим, что

$$\frac{dp(x/\Theta)}{d\Theta} = \frac{d \ln p(x/\Theta)}{d\Theta} p(x/\Theta). \quad (1.9.5)$$

Подставляя (1.9.5) в (1.9.4), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln p(x/\Theta)}{d\Theta} p(x/\Theta) [\hat{\Theta}(x) - \Theta] dx = 1.$$

Перепишем подынтегральное выражение в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d \ln p(x/\Theta)}{d\Theta} \sqrt{p(x/\Theta)} \right] \left[\sqrt{p(x/\Theta)} [\hat{\Theta}(x) - \Theta] \right] dx = 1.$$

и используем неравенство Буняковского-Шварца:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d \ln p(x/\Theta)}{d\Theta} \right]^2 p(x/\Theta) dx \times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\Theta}(x) - \Theta]^2 p(x/\Theta) dx \geq 1. \quad (1.9.6)$$

В связи с тем, что каждый из сомножителей представляет собой математическое ожидание, имеем следующее неравенство:

$$M\{[\hat{\Theta}(x) - \Theta]^2\} \geq \left\{ M\left[\frac{d \ln p(x/\Theta)}{d\Theta} \right]^2 \right\}^{-1}.$$

Итак, неравенство (1.9.1) можно считать доказанным. Для доказательства неравенства (1.9.2) заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x/\Theta) dx = 1.$$

Дифференцируя по Θ , имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(x/\Theta)}{\partial \Theta} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} p(x/\Theta) dx \quad (1.9.7)$$

Вновь дифференцируя по Θ и применяя (1.9.5), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta^2} p(x/\Theta) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} \right)^2 p(x/\Theta) dx = 0.$$

Отсюда следует

$$M \left[\frac{\partial^2 \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta^2} \right] = -M \left[\frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} \right]^2.$$

Последнее равенство означает справедливость условия (1.9.2).

Неравенство Крамера-Рао позволяет сделать ряд важных замечаний.

1. Любая несмещенная оценка имеет дисперсию больше, чем некоторое число.
2. Неравенство Буняковского-Шварца (1.9.6) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} = (\hat{\Theta}(x) - \Theta) k(\Theta). \quad (1.9.8)$$

Если эффективная оценка существует (равенство (1.9.8) выполняется), то эта оценка является оценкой максимального правдоподобия. Действительно, уравнение правдоподобия имеет вид

$$\left. \frac{\partial \ln p(x/\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\hat{\Theta}_{\text{пл}}} = 0.$$

Для того чтобы правая часть равенства (1.9.8) принимала нулевое значение, оценка

$\hat{\Theta}$ должна быть равна $\hat{\Theta}_{\text{пл}}$.

3. Если эффективной оценки не существует (равенство (1.9.8) не выполняется), то неизвестно, насколько оптимальной является оценка максимального правдоподобия (насколько близко она приближается к границе). В этой ситуации границу и дисперсию оценки приходится вычислять и полученные величины сравнивать. Однако достаточно обнадеживающим является тот факт, что оценка по максимуму правдоподобия является асимптотически эффективной, иначе говоря, при стремлении размера выборки (размерности вектора x к бесконечности) дисперсия оценки максимального правдоподобия стремится к своей границе.

1.10. Непараметрические методы

В предыдущей главе мы рассматривали вопросы обучения с учителем, допуская, что вид основных плотностей распределения известен. Для многих случаев принятия решения это допущение неверно. Далеко не всегда распространенные параметрические формы полностью соответствуют плотностям распределения, встречающимся на практике. В данном разделе мы рассмотрим непараметрические процедуры, которыми можно пользоваться, не считая, что вид основных плотностей распределения известен.

Для распознавания образов интерес представляют несколько различных видов непараметрических методов. Один из методов состоит из процедур оценки плотности распределения $p(\bar{x}/H_i)$ на основании выбранных образов. Если эти оценки удовлетворительны, то при проектировании оптимального классификатора ими можно заменить истинные значения плотности распределения.

Другой метод состоит из процедур прямой оценки апостериорных вероятностей $P(H_i/\bar{x})$. Этот метод близок к таким решающим процедурам, как правило «ближайшего соседа», в котором, обходя вероятностные оценки, сразу переходят к решающим функциям.

И наконец, есть непараметрические процедуры, преобразующие пространство признаков так, чтобы в преобразованном пространстве можно было использовать параметрические методы.

1.10.1. Оценка плотности распределения

Методы оценки неизвестной плотности распределения основываются на том, что вероятность P попадания вектора x в область R задается выражением:

$$P = \int_R p(x') dx'. \quad (1.10.1)$$

Таким образом, P есть усредненный вариант плотности распределения $p(x)$, и можно оценить это значение p посредством оценки вероятности P . Предположим, что n выборок x_1, x_2, \dots, x_n берутся независимо друг от друга в соответствии с вероятностным законом $p(x)$. Очевидно, что вероятность попадания k из n выборок в R задается биномиальным законом

$$P_k = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} \quad (1.10.2)$$

и ожидаемой величиной k будет

$$E[k] = nP. \quad (1.10.3)$$

Более того, это биномиальное распределение для k имеет довольно резко выраженные максимумы около среднего значения, поэтому мы считаем, что отношение k/n будет хорошей оценкой вероятности P , а следовательно, и сглаженной плотности распределения. Если теперь мы допустим, что $p(x)$ непрерывна и область R настолько мала, что p в ее пределах меняется незначительно, то можем написать

$$\int_R p(x') dx' \approx p(x)V, \quad (1.10.4)$$

где x — это точка внутри R и V — объем R . Объединяя уравнения (1.10.1 – 1.10.4), получаем следующую очевидную оценку для $p(x)$:

$$p(x) \approx \frac{k/n}{V},$$

Остается решить несколько проблем практического и теоретического плана. Если мы фиксируем объем V и делаем все больше и больше выборок, отношение k/n сойдется (по вероятности) требуемым образом, но при этом мы получаем оценку только пространственно усредненной величины $p(x)$:

$$\frac{P}{V} = \frac{\int_R p(x') dx'}{\int_R dx'}.$$

Если мы хотим получить $p(x)$, а не усредненный ее вариант, необходимо устремить V к нулю. Однако если зафиксировать количество n выборок и позволить V стремиться к нулю, то область в конечном счете станет настолько мала, что не будет содержать в себе никаких выборок, и наша оценка $p(x) \approx 0$ будет бесполезной.

С практической точки зрения количество выборок всегда ограничено, так что нельзя позволить объему V становиться бесконечно малым. Если приходится пользоваться таким видом оценки, то нужно допускать определенную дисперсию отношения k/n и определенное усреднение плотности распределения $p(x)$.

С теоретической точки зрения интересно, как можно обойти эти ограничения при наличии неограниченного количества выборок. Предположим, что мы пользуемся следующей процедурой. Для оценки плотности распределения x мы образуем последовательность областей, содержащих x . Первая область будет соответствовать одной выборке, вторая — двум и т. д. Пусть V_n будет иметь объем R_n , k_n — количество выборок, попадающих в R_n , а $p_n(x)$ — n -я оценка $p(x)$:

$$p_n(x) = \frac{k_n/n}{V_n}. \quad (1.10.5)$$

Если $p_n(x)$ должна сойтись к $p(x)$, то следует выполнить три условия:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n / n = 0$.

Первое условие обеспечивает сходимость пространственно усредненного P/V к $p(x)$ при однородном сокращении областей и при непрерывности p в x . Второе условие, имеющее смысл только при $p(x) \neq 0$, обеспечивает сходимость (по вероятности) отношения частот к вероятности P .

Совершенно ясно, что третье условие необходимо, если $p_n(x)$, заданная соотношением (1.10.5), вообще должна сойтись. Это условие говорит также о том, что, хотя в конечном счете в небольшую область R_n попадает огромное количество выборок, оно составит лишь незначительно малую часть всего количества выборок.

Существует два общих способа получения последовательностей областей, удовлетворяющих указанным выше условиям. Первый способ заключается в сжатии начальной области за счет определения объема V_n , как некоторой функции от n , такой, чтобы $V_n = 1/\sqrt{n}$. Далее следует показать, что случайные величины k_n и k_n/n ведут себя правильно или, что $p_n(x)$ сходится к $p(x)$. В этом заключается метод парзеновского окна, рассматриваемый в следующем разделе. Во втором методе k_n определяется как некоторая функция от n : $k_n = \sqrt{n}$. Здесь объем V_n увеличивается до тех пор, пока не охватит k_n «соседей» x . Это метод оценки по k_n ближайшим соседям. Оба эти метода действительно обеспечивают сходимость, хотя трудно сказать что-либо определенное об их поведении при конечном числе выборок.

Парзеновские окна

Зададим область R_n в виде d -мерного гиперкуба, длина ребра которого равна h_n и, следовательно, объем равен

$$V_n = h_n^d.$$

Определим функцию окна:

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } |u_j| \leq 1/2, \quad j = 1, 2, \dots, d \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Таким образом, $\varphi(u)$ определяет единичный куб с центром в начале координат.

Отсюда следует, что $\varphi\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)$ равняется единице, если x_i находится в гиперкубе объема V_n с центром в x , или нулю в любом другом случае. Следовательно, количество выборок в этом гиперкубе задается выражением:

$$k_n = \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)$$

Подставляя полученное выражение в (1.10.5), получаем оценку плотности вероятности:

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{V_n} \varphi\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right). \quad (1.10.6)$$

Полученная оценка должна быть неотрицательна с площадью, равной 1. Для этого необходимо:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq 0; \\ \int \varphi(u) du &= 1. \end{aligned}$$

Достоинство рассмотренного метода заключается в том, что при достаточно большом числе выборок оценка плотности вероятности сходится к неизвестной плотности. В то же время требуемое число выборок может оказаться чрезвычайно большим. Это число может быть слишком велико для реальной ситуации, причем практически отсутствуют способы уменьшения требуемого объема данных. Более того, потребность в числе выборок растет экспоненциально с увеличением размерности пространства признаков.

Оценка методом k_n ближайших соседей

Одна из проблем, с которой сталкиваются при использовании метода парзеновского окна, заключается в выборе последовательности объемов ячеек $V_1, V_2 \dots$. Если V_1 слишком мал, то большинство объемов будут пустыми, и оценка $p_n(x)$ будет ошибочной. Если V_1 слишком велик, то из-за усреднения по объему ячейки могут быть потеряны важные пространственные отклонения от $p(x)$. Кроме того, вполне может случиться, что объем ячейки, уместный для одного значения x , может совершенно не годиться для других случаев.

Один из возможных способов решения этой проблемы — сделать объем ячейки функцией данных, а не количества выборок. Например, чтобы оценить $p(x)$ на основании n

выборок, можно центрировать ячейку вокруг x и позволить ей расти до тех пор, пока она не вместит k_n выборок, где k_n есть некая определенная функция от n . Эти выборки будут k_n ближайшими соседями x . Если плотность распределения вблизи x высокая, то ячейка будет относительно небольшой, что приводит к хорошему разрешению. Если плотность распределения невысокая, то ячейка возрастает, но рост приостанавливается вскоре после ее вступления в области более высокой плотности распределения. В любом случае, если мы берем

$$p_n(x) = \frac{k_n / n}{V_n}, \quad (1.10.7)$$

мы хотим, чтобы k_n стремилось к бесконечности при стремлении n к бесконечности, т.к. этот факт гарантирует, что k_n/n будет хорошей оценкой вероятности попадания точки в ячейку объема V_n . Однако мы хотим также, чтобы k_n росло достаточно медленно для того, чтобы размер ячейки, необходимый для вмещения k_n выборок, сжался до нуля. Таким образом, из формулы (1.10.7) видно, что отношение k_n/n должно стремиться к нулю.

Можно показать, что условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} k_n / n = 0$$

являются необходимыми и достаточными для сходимости $p_n(x)$ и $p(x)$ по вероятности во всех точках, где плотность p непрерывна.

1.10.2. Оценка апостериорных вероятностей. Правило ближайших соседей

Методы, рассмотренные в п.1.10.1, могут быть с успехом использованы для оценки апостериорных вероятностей $P(H_i / x)$ и, следовательно, для принятия решений по критерию максимума названных вероятностей.

Предположим, что мы размещаем ячейку объема V вокруг x и захватываем k обучающих выборок, k_i из которых оказываются принадлежащими гипотезе H_i . При этом

$$p_n(x, H_i) = \frac{k_i / n}{V}.$$

Таким образом, приемлемой оценкой для $P(H_i/x)$ будет

$$P_n(H_i / x) = \frac{p_n(x, H_i)}{\sum_{j=1}^M p_n(x, H_j)} = \frac{k_i}{k}. \quad (1.10.8)$$

Из формулы (1.10.8) следует, что оценкой апостериорной вероятности того факта, что справедлива гипотеза H_i , является доля выборок, отмеченных при обучении как

принадлежащих i -му классу. Если число обучающих выборок достаточно велико, а размер ячейки достаточно мал, то получаем практически наилучшую оценку апостериорной плотности.

Интересно, что хорошее решение (близкое к оптимальному) получается при принятии решения о справедливости той или иной гипотезы всего по одному ближайшему соседу. Смысл данного правила заключается в том, что решение принимается в пользу той гипотезы, которой соответствует самая близкая¹ обучающая выборка.

Очевидным расширением правила ближайшего соседа является правило k ближайших соседей. В этом случае анализируют k обучающих выборок, расположенных рядом с наблюдаемой выборкой. Предпочтение отдается той гипотезе, которая порождает большее число обучающих выборок в окрестности наблюдаемой выборки, для которой принимается решение.

1.10.3. Аппроксимации путем разложения в ряд

Все описанные до сих пор непараметрические методы имеют тот недостаток, что требуют хранения в памяти всех выборок. А так как для получения хороших оценок необходимо большое количество выборок, то потребность в памяти может быть слишком велика. Кроме того, может потребоваться значительное время вычисления каждый раз, когда один из методов используется для оценки величины $p(x)$ или классификации нового x . При определенных обстоятельствах процедуру окна Парзена можно несколько видоизменить, чтобы значительно сократить эти требования.

Основная идея заключается в аппроксимации функции окна путем разложения ее в конечный ряд, что делается с приемлемой точностью в представляющей интерес области. Если нам сопутствует удача и мы можем найти два множества функций $\phi_j(x)$ и $\chi_j(x)$, которые допускают разложение

$$\varphi\left(\frac{x-x_j}{h_n}\right) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x) \chi_j(x_i), \quad (1.10.9)$$

тогда

$$\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x) \sum_{i=1}^n \chi_j(x_i),$$

и из уравнения (1.10.6) имеем

¹ Например, по среднеквадратичному расстоянию.

$$p_n(x) = \sum_{j=1}^m b_j \phi_j(x),$$

где

$$b_j = \frac{a_j}{nV_n} \sum_{i=1}^n \chi_j(x_i). \quad (1.10.10)$$

Этот подход имеет некоторые преимущества в том случае, когда можно получить достаточно точное разложение с приемлемым значением m . Информация, содержащаяся в n выборках, сводится к m коэффициентам b_j . Если получают дополнительные выборки, соотношение (1.10.10) для b_j можно легко обновить, причем количество коэффициентов остается неизменным.

Если функции ψ_j и χ_j являются полиномами от компонент x и x_i , то выражение для оценки $p_n(x)$ есть также полином, который можно довольно эффективно вычислить. Более того, использование этой оценки для получения разделяющих функций $p(x/H_i)$, $P(H_i)$ приводит к простому способу получения полиномиальных разделяющих функций.

Следует отметить одну из проблем, возникающую при применении этого способа. Основным достоинством функции окна является ее тенденция к возрастанию в начале координат и снижению в других точках, так что $\phi((x-x_i)/h_n)$ будет иметь резкий максимум при $x = x_i$ и мало влиять на аппроксимацию $p_n(x)$ для удаленного от x_i . К сожалению, полиномы обладают досадным свойством, заключающимся в том, что они могут содержать неограниченное количество членов. Поэтому при разложении полинома могут обнаружиться члены, ассоциируемые с x_i , удаленным от x , сильно влияющим на разложение. Следовательно, важно убедиться, что разложение каждой функции окна действительно точное в представляющей интерес области, а для этого может потребоваться большое число членов.

Существует много видов разложения в ряд. Читатели, знакомые с интегральными уравнениями, вполне естественно интерпретируют соотношение (1.10.9) как разложение ядра $\phi(x, x_i)$ в ряды по собственным функциям. Вместо вычисления собственных функций можно выбрать любое приемлемое множество функций, ортогональных в интересующей нас области, и получить согласие по методу наименьших квадратов с функцией окна. Мы применим еще более непосредственный подход и разложим функцию окна в ряд Тейлора. Для простоты ограничимся одномерным случаем с гауссовской функцией окна:

$$\sqrt{\pi}\varphi(u) = e^{-u^2} \approx \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{u^{2j}}{j!}.$$

Самым точным это разложение будет в окрестности $u = 0$, где ошибка будет составлять менее $u^{2m}/m!$. Если мы подставим $u = \frac{x - x_j}{h}$, то получим полином степени $2(m-1)$ от x и x_i . Например, если $m = 2$, то

$$\sqrt{\pi}\varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \approx 1 - \left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 = 1 + \frac{2}{h^2}xx_i - \frac{1}{h^2}x^2 - \frac{1}{h^2}x_i^2$$

и, таким образом,

$$\sqrt{\pi}p_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \sqrt{\pi}\varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \approx b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

где

$$b_0 = \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$b_1 = \frac{2}{h^2n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$b_2 = -\frac{1}{h^2}.$$

Это простое разложение сжимает информацию из n выборок в три коэффициента b_0 , b_1 , b_2 . Оно будет точным, если наибольшее значение $|x - x_i|$ не превышает h . К сожалению, это заставляет нас пользоваться очень широким окном, которое не дает большого разрешения. Беря большое количество членов, мы можем использовать более узкое окно. Если мы считаем r наибольшим значением $|x - x_i|$, то, пользуясь тем фактом, что ошибка в m -членном разложении функции $\sqrt{\pi}\varphi[(x - x_i)/h]$ меньше, чем $(r/h)^{2m}m!$, и пользуясь аппроксимацией Стирлинга для $m!$, найдем, что ошибка в аппроксимации $p_n(x)$ будет меньше, чем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}h} \frac{\left(\frac{r}{h}\right)^{2m}}{m!} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}h\sqrt{2\pi m}} \left[\left(\frac{e}{m}\right) \left(\frac{r}{h}\right)^2 \right]^m$$

Таким образом, ошибка мала только тогда, когда $m > e(r/h)^2$. Это говорит о том, что требуется много членов, если ширина окна h невелика по сравнению с расстоянием r от x до наиболее удаленной выборки.

1.10.4. Линейный дискриминант Фишера

Одна из ключевых проблем, встречающихся при распознавании образов, заключается в так называемом «проклятии размерности». Процедуры, выполняемые аналитически в пространствах признаков небольшой размерности, могут стать совершенно неприменимыми в пространствах с числом признаков, равным нескольким десяткам. Были разработаны различные методы уменьшения размерности пространства признаков в надежде получить задачу, поддающуюся решению.

Можно уменьшить размерность с d измерений до одного, просто проецируя d -мерные данные на прямую. Если выборки образуют хорошо разделенные компактные группы в d -пространстве, проекция на произвольную прямую обычно смешивает выборки из всех классов. Однако, вращая эту прямую, мы можем найти такую ориентацию, при которой спроецированные выборки будут хорошо разделены. Именно это является целью классического дискриминантного анализа.

Предположим, что мы имеем множество n d -мерных выборок x_1, \dots, x_n , из которых n_1 выборок относятся к подмножеству X_1 , соответствующему гипотезе H_1 , и n_2 выборок относятся к подмножеству X_2 , соответствующему гипотезе H_2 . Если мы образуем линейную комбинацию компонент вектора x , получим скалярную величину

$$y = \bar{w}' \bar{x}$$

и соответствующее множество n выборок y_1, \dots, y_n , разделенное на подмножества Y_1 и Y_2 . Геометрически, если $\|\bar{w}\| = 1$, каждая компонента y_i есть проекция соответствующего x_i на прямую в направлении \bar{w} . В действительности величина \bar{w} не имеет реального значения, поскольку она просто определяет масштаб y . Однако направление \bar{w} имеет значение. Если мы вообразим, что выборки, помеченные H_1 , попадают более или менее в одну группу, а выборки, помеченные H_2 , попадают в другую, то мы хотим, чтобы проекции на прямой были хорошо разделены и не очень перемешаны. На рис. 1.2 показан выбор двух различных значений w для двумерного случая.

Мерой разделения спроецированных точек служит разность средних значений выборки. Если m_i есть среднее значение d -мерной выборки, заданное как

$$m_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in X_i} x,$$

то среднее значение выборки для спроецированных точек задается посредством

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{y \in Y_i} y = \frac{1}{n_i} \sum_{y \in Y_i} \bar{w}' \bar{x}.$$

Отсюда следует, что $\left| \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 \right| = \left| \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 \right| = \left| \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 \right|$ и что мы можем сделать эту разность сколь угодно большой, масштабируя \bar{w} .

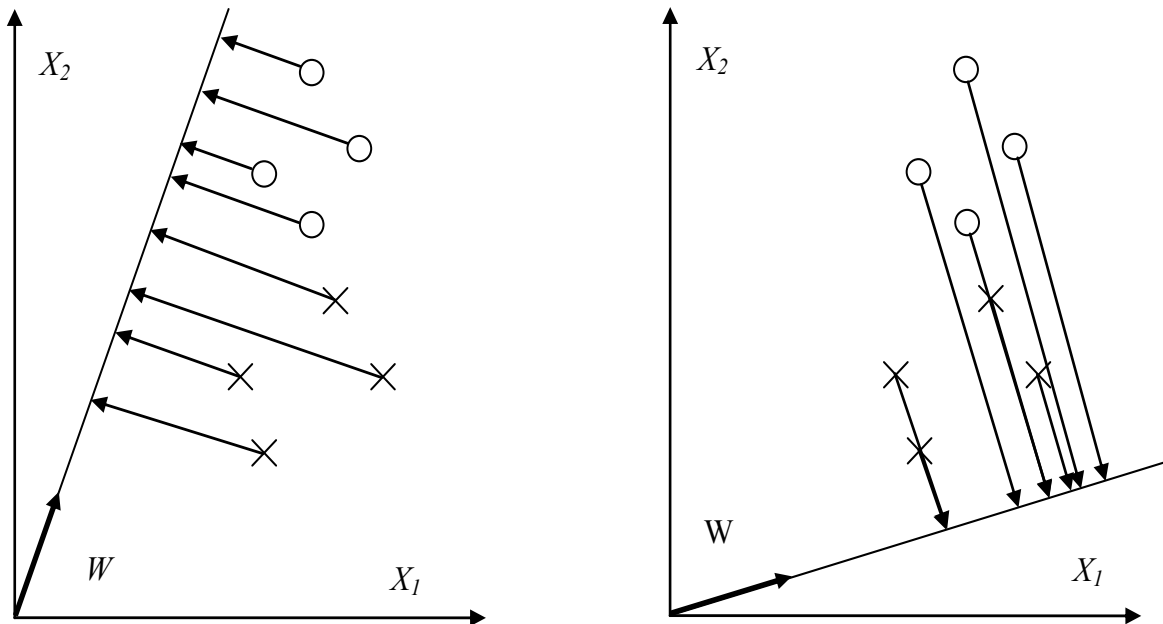


Рис. 1.2 Выбор направления вектора W.

Чтобы получить хорошее разделение спроецированных данных, необходимо, чтобы разность между средними значениями была велика относительно некоторого показателя стандартных отклонений для каждого класса. Вместо получения дисперсий выборок определим разброс для спроецированных выборок, помеченных H_i , посредством

$$\tilde{s}_i^2 = \sum_{y \in Y_i} (y - \tilde{m}_i)^2.$$

Таким образом, $(1/n)(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)$ является оценкой дисперсии совокупности данных, где $(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)$ называется *полным разбросом внутри класса спроецированных выборок*. Линейный дискриминант Фишера тогда определяется как такая линейная разделяющая функция $w^T x$, для которой функция критерия

$$J(\bar{w}) = \frac{|\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|^2}{\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2}$$

максимальна.

Чтобы получить J как явную функцию от \bar{w} , определим матрицы разброса S_i и S_w посредством

$$S_i = \sum_{x \in X_i} (\bar{x} - \bar{m}_i)(\bar{x} - \bar{m}_i)^t$$

и

$$S_w = S_1 + S_2.$$

Тогда

$$\sum_{x \in X_i} (\bar{w}^t \bar{x} - \bar{w}^t \bar{m}_i)^2 = \sum_{x \in X_i} \bar{w}^t (\bar{x} - \bar{m}_i)(\bar{x} - \bar{m}_i)^t \bar{w} = \bar{w}^t S_i \bar{w}.$$

Отсюда

$$\bar{w}^t S_i \bar{w} = \bar{w}^t S_i \bar{w}.$$

Аналогично

$$(\bar{w}^t \bar{m}_1 - \bar{w}^t \bar{m}_2)^2 = \bar{w}^t (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)^t \bar{w} = \bar{w}^t S_B \bar{w},$$

где

$$S_B = (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)^t.$$

Матрица S_w называется матрицей разброса внутри класса. Она пропорциональна ковариационной выборочной матрице для совокупности d -мерных данных. Она будет симметричной, положительно полуопределенной и, как правило, невырожденной, если $n > d$. S_B называется матрицей разброса между классами. Она также симметричная и положительно полуопределенная, но из-за того, что она является внешним произведением двух векторов, ее ранг будет не больше 1. В частности, для любого \bar{w} направление $S_B \bar{w}$ совпадает с направлением $\bar{m}_1 - \bar{m}_2$ и S_B — вполне вырожденная матрица.

При помощи S_B и S_w функцию критерия J можно представить в виде

$$J(w) = \frac{\bar{w}^t S_B \bar{w}}{\bar{w}^t S_w \bar{w}}.$$

Это выражение хорошо известно в математической физике как обобщенное частное Релея. Легко показать, что вектор \bar{w} , который максимизирует J , должен удовлетворять соотношению

$$S_B \bar{w} = \lambda S_w \bar{w},$$

что является обобщенной задачей определения собственного значения.

Если S_W является невырожденной, мы можем получить обычную задачу определения собственного значения, написав

$$S_W^{-1} S_B \bar{w} = \lambda \bar{w}.$$

В нашем частном случае не нужно находить собственные значения и собственные векторы $S_W^{-1} S_B$ из-за того, что направление $S_B \bar{w}$ всегда совпадает с направлением $\bar{m}_1 - \bar{m}_2$. Поскольку масштабный множитель для w несуществен, мы можем сразу написать решение

$$\bar{w} = S_W^{-1} (\bar{m}_1 - \bar{m}_2). \quad (1.10.11)$$

Таким образом, мы получили линейный дискриминант Фишера - линейную функцию с максимальным отношением разброса между классами к разбросу внутри класса. Задача была преобразована из d -мерной в более приемлемую одномерную. Это отображение n -мерного множества на одномерное, и теоретически оно не может уменьшить минимально достижимый уровень ошибки.

Когда условные плотности распределения $p(\bar{x}/H_i)$ являются многомерными нормальными с равными ковариационными матрицами Σ , то даже не нужно ничем жертвовать. В этом случае мы вспоминаем, что граница оптимальных решений удовлетворяет уравнению

$$\bar{w}' \bar{x} + w_0 = 0,$$

где

$$\bar{w} = \Sigma^{-1} (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2);$$

и w_0 есть константа, включающая в себя w и априорные вероятности.

Если мы используем средние значения и ковариационную матрицу выборок для оценки μ_i и Σ , то получаем вектор в том же направлении, что и \bar{w} , удовлетворяющий (1.10.11), который максимизирует J . Таким образом, для нормального случая с равными ковариациями оптимальным решающим правилом будет решение H_1 , если линейный дискриминант Фишера превышает некоторое пороговое значение, и решение H_2 — в противном случае.

1.10.5. Множественный дискриминантный анализ

Для задачи с M классами естественное обобщение линейного дискриминанта Фишера включает $(M - 1)$ разделяющих функций.

Таким образом, проекция будет из d -мерного пространства на $(M-1)$ -мерное пространство, причем принимается, что $d \geq M$. Обобщение для матрицы разброса внутри класса очевидное:

$$S_W = \sum_{i=1}^M S_i,$$

где, как и прежде,

$$S_i = \sum_{x \in X_i} (\bar{x} - \bar{m}_i)(\bar{x} - \bar{m}_i)^t,$$

и

$$m_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in X_i} x.$$

Соответствующее обобщение для S_B не так очевидно. Предположим, что определяем полный вектор средних значений m и полную матрицу разброса S_T посредством

$$m = \frac{1}{n} \sum_x x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M n_i m_i,$$

и

$$S_T = \sum_x (\bar{x} - \bar{m})(\bar{x} - \bar{m})^t.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^M \sum_{x \in X_i} (\bar{x} - \bar{m}_i + \bar{m}_i - \bar{m})(\bar{x} - \bar{m}_i + \bar{m}_i - \bar{m})^t = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{x \in X_i} (\bar{x} - \bar{m}_i)(\bar{x} - \bar{m}_i)^t + \sum_{i=1}^M \sum_{x \in X_i} (\bar{m}_i - \bar{m})(\bar{m}_i - \bar{m})^t = \\ &= S_W + \sum_{i=1}^M n_i (\bar{m}_i - \bar{m})(\bar{m}_i - \bar{m})^t. \end{aligned}$$

Естественно определять этот второй член как матрицу разброса между классами, так что полный разброс есть сумма разброса внутри класса и разброса между классами:

$$S_B = \sum_{i=1}^M n_i (\bar{m}_i - \bar{m})(\bar{m}_i - \bar{m})^t$$

$$S_T = S_W + S_B.$$

Проекция из d -мерного пространства в $(M-1)$ -мерное пространство осуществляется с помощью $M-1$ разделяющих функций

$$y_i = \bar{w}_i' \bar{x}; \quad i=1, \dots, M-1.$$

Если считать y_i составляющими вектора \bar{y} , а векторы весовых функций \bar{w}_i столбцами матрицы W размера $d \times (M-1)$, то проекцию можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\bar{y} = W^t \bar{x}.$$

Выборки y_1, \dots, y_n проецируются на соответствующее множество выборок x_1, \dots, x_n , которые можно описать с помощью их векторов средних значений и матриц разброса. Так, если мы определяем

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{y \in Y_i} y;$$

$$\tilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M n_i \tilde{m}_i;$$

$$\tilde{S}_W = \sum_{i=1}^M \sum_{y \in Y_i} (y - \tilde{m}_i)(y - \tilde{m}_i)^t;$$

и

$$\tilde{S}_B = \sum_{i=1}^M n_i (\tilde{m}_i - \tilde{m})(\tilde{m}_i - \tilde{m})^t,$$

то можно непосредственно получить

$$\tilde{S}_W = W^t S_W W;$$

$$\tilde{S}_B = W^t S_B W.$$

Эти уравнения показывают, как матрицы разброса внутри класса и между классами отображаются посредством проекции в пространство меньшей размерности. Находим матрицу отображения W , которая в некотором смысле максимизирует отношение разброса между классами к разбросу внутри класса. Простым скалярным показателем разброса является определитель матрицы разброса. Определитель есть произведение собственных значений, а следовательно, и произведение дисперсий в основных направлениях, измеряющее объем гиперэллипсоида разброса. Пользуясь этим показателем, получим функцию критерия

$$J(W) = \frac{|\tilde{S}_B|}{|\tilde{S}_W|} = \frac{|W^t S_B W|}{|W^t S_W W|}.$$

Задача нахождения прямоугольной матрицы W , которая максимизирует J , достаточно сложна. К счастью, оказывается, что ее решение имеет относительно простой

вид. Столбцы оптимальной матрицы W являются обобщенными собственными векторами, соответствующими наибольшим собственным значениям в

$$S_B w_i = \lambda_i S_W w_i.$$

Следует сделать несколько замечаний относительно данного решения. Во-первых, если S_W – невырожденная матрица, то данную задачу можно свести к обычной задаче определения собственного значения. Однако в действительности это нежелательно, т.к. при этом потребуется ненужное вычисление матрицы, обратной S_W . Вместо этого можно найти собственные значения как корни характеристического полинома

$$|S_B - \lambda_i S_W| = 0;$$

а затем решить

$$(S_B - \lambda_i S_W) w_i = 0;$$

непосредственно для собственных векторов w_i . Поскольку S_B является суммой M матриц ранга единица или менее и поскольку только $M-1$ из них независимые матрицы, постольку S_B имеет ранг $(M-1)$ или меньше. Так что не более $M-1$ собственных значений не нули и искомые векторы весовых функций соответствуют этим ненулевым собственным значениям. Если разброс внутри класса изотропный, то собственные векторы будут просто собственными векторами матрицы S_B , а собственные векторы с ненулевыми собственными значениями стягивают пространство, натянутое на векторы m_i — m . В этом частном случае столбцы матрицы W можно найти, просто применяя процедуру ортонормирования Грама–Шмидта к $M-1$ векторам m_i . Наконец, заметим, что, вообще говоря, решение для W не является однозначным. Допустимые преобразования включают вращение и масштабирование осей различными путями. Это все линейные преобразования из $(M-1)$ -мерного пространства в $(M-1)$ -мерное пространство, и они не меняют значительно положения вещей. В частности, они оставляют функцию критерия $J(W)$ инвариантной.

Как и в случае с двумя классами, множественный дискриминантный анализ в первую очередь позволяет сократить размерность задачи. Параметрические или непараметрические методы, которые могут не сработать в первоначальном (многомерном) пространстве, могут хорошо действовать в пространстве меньшей размерности.

Например, можно будет оценить отдельные ковариационные матрицы для каждого класса и использовать допущение об общем многомерном нормальном распределении после преобразования, что было невозможно сделать с первоначальными данными. Вообще преобразование влечет за собой некоторое ненужное перемешивание данных и

повышает теоретически достижимый уровень ошибки, а проблема классификации данных все еще остается.

1.11. Основные положения радиолокации распределённых целей

Применение сверхширокополосных сигналов и эффекта синтеза апертуры за счёт движения Земли, перемещения космических, воздушных летательных аппаратов позволяет получить радиолокационное изображение (РЛИ) пространственно-распределённой цели (ПРЦ), характеризующееся достаточно высокой разрешающей способностью, при которой наблюдатель имеет возможность решать задачу классификации и распознавания названных ПРЦ

Проблема классификации радиолокационных изображений ПРЦ, формируемых с помощью таких средств наблюдения, является частной задачей классической теории распознавания образов - ведущего научного направления современного естествознания, сложившегося и интенсивно развивающегося в течение последних десятилетий.

Фундаментальные основы статистической теории распознавания заложены в трудах Т. Андерсона [1], А.А. Харкевича [2], Г.С. Себастиана [3], М.М. Бонгарда [4] и др. Современное состояние этой теории подробно отражено в работах В.Н. Вапника и А.Я. Червоненкиса [5], Р. Дуды и П. Хафа [6], В.А. Ковалевского [7], Дж. Ту и Р.Гонсалеса [8], А.Л. Горелика [9,10] и других авторов [11,12].

Пространственно-распределенная цель представляет собой совокупность центров стабильного отражения («блестящих точек») и большого числа статистически однородных отражателей, равномерно распределенных по поверхности цели. В качестве модели последних может быть принята абсолютно шероховатая поверхность, отражения от которой образуют так называемую диффузионную составляющую сигнала.

Количество, положение и ЭПР центров стабильного отражения остаются практически постоянными при изменении ракурса цели на несколько градусов.

Примерами пространственно-распределённых целей могут служить радиолокационные изображения надводных кораблей, полученных космической РЛС с синтезированной апертурой.

На рис. 1.3 представлены РЛИ надводных кораблей для различных условий наблюдения [13,14] при разрешающей способности РСА - верхний ряд - 15 м и нижний ряд - 35 м; ракурсе наблюдения 283° (А - В), 315° (Г - Е) и 270° (Ж - И); отсутствии качки (А, Г, Ж) и наличии боковой качки 10° на сторону (Б и Д) и 15° на сторону (В и Е), а также

при совместном воздействии килевой качки и рысканья $\pm 7^\circ$ (З, И), где R - это направление по дальности, X - направление по азимуту.

Формулировка существа проблемы заключается в том, чтобы, располагая исходным множеством объектов классификации и заданным априори принципом разделения этого множества на классы, распознающий автомат (РА) в соответствии с оптимальным или близким к нему алгоритмом сформировал из наблюдаемых данных вектор признаков $L = \{l_1, \dots, l_k\}$ и в соответствии с эффективным решающим правилом разделил пространство признаков таким образом, чтобы, в лучшем случае, с максимальной, а в худшем случае, с заданной вероятностью определить класс очередного обнаруженного объекта. При этом общая постановка задачи классификации объектов радиолокационного наблюдения может быть сформулирована следующим образом.

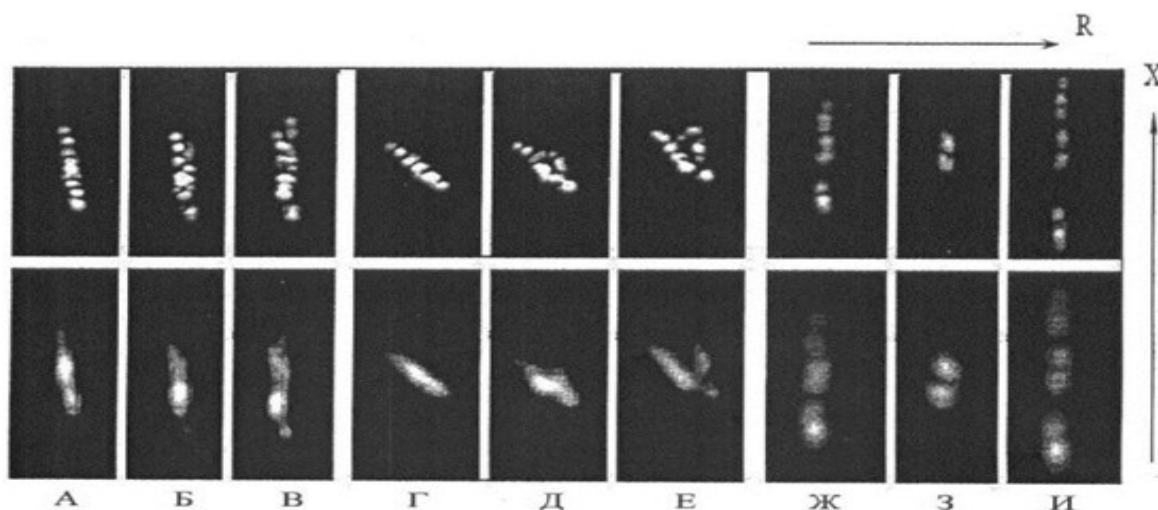


Рис. 1.3. Примеры РЛИ пространственно-распределенных целей (надводных кораблей)

Пусть задано множество B объектов различных типов. Система классификации состоит из P радиолокационных средств, содержащих РА. В каждом из таких РА используется множество радиолокационных сигналов S , на базе которых образуется множество признаков распознавания и множество правил принятия решения о классе наблюдаемого объекта K . Кроме того, введем множество параметров x , связанных с объектом и условиями его наблюдения, причем часть названных параметров x могут быть измерены РА, а часть параметров x_0 не измеряются в процессе решения задачи классификации, но существенным образом влияют на ее эффективность, которая оценивается с помощью некоторого критерия $\mathcal{E}\{\cdot\}$.

Если стоимость создания системы классификации C , а общие ассигнования – C_0 , то формально решение задачи сводится к отысканию экстремума функционала:

$$\mathcal{E}\{P, S, L, K, x/B\} \quad (1.11.1)$$

при ограничении

$$C \leq C_0. \quad (1.11.2)$$

Точные методы решения этой задачи неизвестны, что, вообще говоря, достаточно естественно в связи с чрезвычайно общим характером ее постановки. Разумной альтернативой может служить переход к более частной конкретной задаче с учетом реальных условий, связанных с особенностями решаемой проблемы. При рассматриваемой в работе классификации ПРЦ следует учесть некоторые ограничения, а именно, выраженный статистический характер проблемы, связанный с природой наблюдаемых данных и практической невозможностью решения электродинамической задачи, определяет целесообразность использования вероятностных признаков, отказываясь от детерминированного, логического и структурного подходов [15].

Указанные ограничения определяют методологию подхода к решению задачи классификации ПРЦ. При использовании любого из известных статистических критериев вектор оптимальных признаков L должен быть образован на основе коэффициентов правдоподобия Δ_l, Δ_m (где M - число классов) - достаточных статистик, а разбиение пространства решения на области, соответствующие каждому из классов, производится гиперплоскостями (причем, коэффициентами в уравнениях таких плоскостей служат в общем случае элементы матрицы стоимостей).

При полной априорной определенности о распознаваемых классах и условиях наблюдения, а также отсутствии технических ограничений на этом проблема была бы исчерпана. Однако при практическом использовании РА оба названных требования далеки от реальности. В первую очередь это связано с наличием множества мешающих параметров χ , которое делится на два подмножества: χ - подмножество принципиально не измеряемых параметров и χ_0 - подмножество параметров, оцениваемых по наблюдаемым данным.

Если $U(t)$ – вектор-функция наблюдаемых данных, то эффективные признаки следует искать, отталкиваясь от коэффициентов правдоподобия:

$$L_{ij} = \frac{P\{U(t)/\bar{x}_0, \bar{x}_i, B_j\}}{P(\bar{U}(t)/B = 0)}, \quad (1.11.3)$$

где $P\{\cdot\}$ - условный функционал плотности вероятности для реализации $U(t)$;

\bar{x}_0 - вектор оценок измеряемых параметров;

\bar{x}_i - i -я комбинация неизвестных параметров;

B_j - указание на наличие цели j -го класса (при $B = 0$ цель отсутствует).

Следует заметить, что размерность вектора L становится чрезвычайно большой в связи с континуальным в общем случае характером вектора x . С другой стороны, при его формировании возникает ряд проблем алгоритмического и технического характера. И, наконец, существующая в современных условиях база данных о радиолокационных портретах (РП) ПРЦ обычно настолько мала, что не позволяет говорить о достаточно достоверных сведениях о подавляющем большинстве индивидуальных характеристик, конструктивных и геометрических особенностей ПРЦ. Последнее обстоятельство не позволяет получить вектор с составляющими компонентами типа (1.11.3) и использовать их для классификации.

В связи с этим применяется следующая методология отыскания признаков. Названный вектор ищется на основе выражений для достаточных статистик в предположении о том, что РП и условия наблюдения заданы. После отыскания этих признаков они последовательно модифицируются с тем, чтобы полностью учесть имеющуюся априорную информацию с одновременным отказом от учета тех структурных и алгоритмических особенностей, которые недоступны на этапах проектирования и начальной боевой эксплуатации РА. В тоже время полученные алгоритмы не исключают, а напротив, предусматривают адаптацию к новым данным о РП и условиям наблюдения, полученным при опытной и боевой эксплуатации систем МКРЦ. Аналогичный подход реализуется и по отношению к решающим правилам.

Ряд конкретных решений задачи классификации ПРЦ приведён в работах [16-19].

Литература к главе 1

1. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон; пер. с англ. Б.В. Гнеденко. М. Физматгиз, 1963. 500с.
2. Харкевич А.А. Избранные труды. В 3 т. Т. 3. Теория информации. Оpozнaвание образов / А.А. Харкевич. М.: Наука, 1973. 524с.
3. Себастиан Г.С. Процессы принятия решений при распознавании образов / Г.С. Себастиан; пер. с англ. Ивахненко. Киев: Техника, 1965. 152с.
4. Бонгард М.М. Проблема узнавания / М.М. Бонгард. М. Наука, 1967. 320с.
5. Вапник В.Н. Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения) / В.Н. Вапник, А.Я. Червоненкис. М. :Наука, 1974. 616с.
6. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт; пер с англ. В.Л. Стефанюка. М.: Мир, 1976. 511с. ,

7. Ковалевский В.А. Методы оптимальных решений в распознавании изображений / В.А. Ковалевский. М.: Наука, 1976. 328с.
8. Ту Дж. Принципы распознавания образов / Дж.Ту, Р.Гонсалес; пер. с англ. М. Журавлева. М.: Мир, 1978. 412с.
9. Селекция и распознавание на основе локационной информации / под ред. А.Л. Горелик. М. Радио и связь. 1990. 236с.
10. Горелик А.Л. Методы распознавания / А.Л. Горелик, В.А. Скрипкин. М.: Высшая школа 1984. 208с.
11. М.Ю. Достовалов, Лифанов А.С., Мусинянц Т.Г. Система автоматизированного распознавания объектов на основе исследования радиолокационных портретов по изображениям РСА КОМПАКТ-100. Исследования Земли из космоса, №1, 2005.
12. Diemunsch J., Wissinger J. MSTAR model-based automatic target recognition: search technology for a robust ATR. Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery V, E. Zeinio, Eds. // Proceedings of SPIE, Vol.3370, 1998.
13. Каталог изображений Земли. Продукция космического аппарата «Алмаз-1». ОАО «НПО машиностроения». Вэб-сайт <http://almaz1.ru/>
14. Дикинис А.В., Иванов А.Ю., Карлин Л.Н., Неронский Л.Б. и др. Атлас аннотированных радиолокационных изображений морской поверхности, полученных космическим аппаратом «Алмаз - 1». - М.: ГЕОС, 1999.
15. Благовещенский С.Н. Справочник по динамике и статике корабля в 2 т. / С.Н. Благовещенский, А.Н. Холодили. Л.: Судостроение, 1975. т.2/ 176с.
16. Доросинский Л.Г. Классификация пространственно-распределенных объектов по данным РЛС бокового обзора / Л.Г. Доросинский, Т.М.Лысенко // Радиотехника 3.1996. с. 8-12
17. Доросинский Л.Г. Исследование алгоритмов распознавания радиолокационных изображений распределённых объектов. 23-я Международная Крымская конференция "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии", Севастополь, 8-18 сентября 2013г.
18. Доросинский Л.Г. Синтез и анализ алгоритмов классификации радиолокационных сигналов 23-я Международная Крымская конференция "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии", Севастополь, 8-18 сентября 2013г.
19. Доросинский Л.Г. Синтез алгоритма распознавания классов радиолокационных сигналов. 24-я Международная Крымская конференция "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии", Севастополь, 7-13 сентября 2014г.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЦ ПО ДАННЫМ КОСМИЧЕСКОЙ РЛС БОКОВОГО ОБЗОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

2.1. Математическая модель цели и отражённого сигнала при решении задач распознавания пространственно-распределённых целей в космических РЛС с синтезированной апертурой

Радиолокационные станции бокового обзора с синтезированной апертурой (РСА), размещённые на космических носителях, обладают решающими преимуществами перед другими средствами космического наблюдения при решении задач классификации пространственно-распределённых объектов на земной и морской поверхностях и, в частности, незаменимы при космическом мониторинге акватории мирового океана. Космические РСА позволяют получить радиолокационные изображения (РЛИ) - радиолокационные портреты ПРЦ. На основе таких портретов формируются признаки для распознавания, использование которых обеспечивает достаточно высокую эффективность классификации ПРЦ.

Для решения проблемы синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов формирования вектора достаточных статистик и, как следствие, получения признаков, используемых для классификации, предварительно должна быть записана математическая модель цели и модель отражённого сигнала, учитывающие особенности наблюдения цели и характеристик её движения.

Для описания взаимного расположения и перемещения носителей РЛС и наблюдаемой цели введем две системы координат (рис.2.1): основную неподвижную систему $OXYZ$ и вспомогательную $oxyz$, связанную с геометрическими осями цели.

Для описания отражающих свойств наблюдаемых целей используем комплексную функцию отражения $f_k^p(\bar{x})$ k -й ПРЦ при наблюдении его p -ой РЛС. В данном случае \bar{x} радиус-вектор элементарного отражающего участка (точки) во вспомогательной системе координат. При этом будем считать, что функция отражения имеет две независимые составляющие – диффузионную $f_k^p(\bar{x})$, связанную с рассеянными отражениями от поверхности цели, и "зеркальную" $f_{k\sigma}^p(\bar{x})$, появление которой вызвано наличием зеркально отражающих элементов конструкции и элементов типа угловых отражателей. Вторая компонента хорошо описывается совокупностью центров стабильного отражения, условно именуемых "блестящими точками", в то время как первая составляющая

представляет собой непрерывную функцию координат. Таким образом, для функции отражения может быть использовано следующее представление:

$$f_k^p(\bar{x}) = f_{k0}^p(\bar{x}) + f_{k\sigma}^p(\bar{x}) = f_{k0}^p(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{N_{kp}} f_{ki}^p \delta(\bar{x} - \bar{x}_{ki}^p). \quad (2.1.1)$$

В этом выражении f_{ki}^p - значение комплексной функции отражения для i -й "блестящей точки" k -й цели при наблюдении ее p -й РЛС; N_{kp} - общее число "блестящих точек" при наблюдении цели k -го класса p -й РЛС; $\delta(\bar{x})$ - дельта-функция; \bar{x}_{ki} - радиус-вектор i -й "блестящей точки". Необходимо отметить, что вид функции отражения $f_k^p(\bar{x})$ существенным образом зависит от ракурса наблюдения цели, что не отмечено в (2.1.1) для сокращения записи. В тех случаях, когда зависимость характера отражений от ракурса имеет принципиальное значение для решения задачи синтеза и анализа алгоритмов распознавания, в контексте будут сделаны необходимые замечания.

При наблюдении цели несколькими (p) РЛС объединим функции отражения в p -компонентный вектор

$$\bar{f}_k(\bar{x}) = \bar{f}_{k0}(\bar{x}) + \bar{f}_{k\sigma}(\bar{x}) \quad (2.1.2)$$

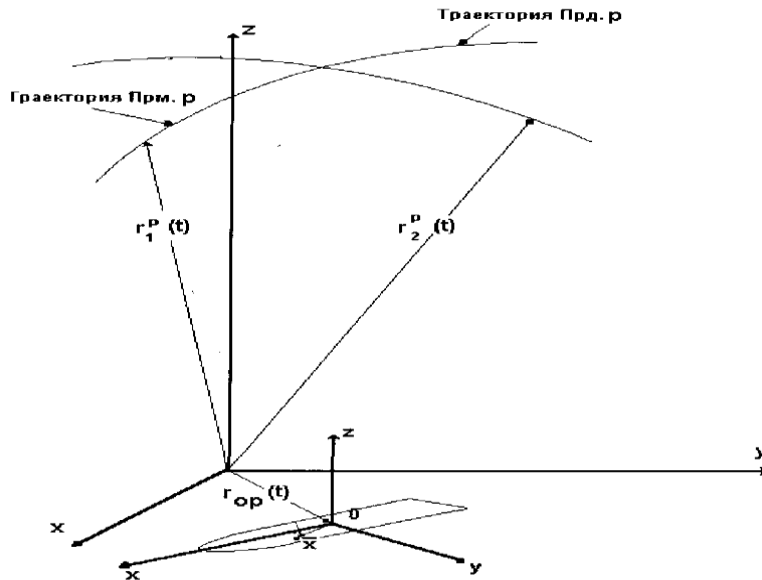


Рис. 2.1. Геометрические соотношения для p -й РЛС системы

Кратко остановимся на статистических свойствах функции отражения (2.1.2). Будем в дальнейшем считать, что диффузионная составляющая описывается p -мерным

гауссовским функционалом плотности распределения вероятностей с нулевым вектором средних значений. Функции отражения соседних элементарных участков поверхности считаем статистически независимыми. При этом матрица взаимных корреляционных функций компонент вектора $\bar{f}_{k0}(\bar{x})$ может быть представлена в следующем виде:

$$\langle 0,5 \bar{f}_{k0}(\bar{x}) \times \bar{f}_{k0}(\bar{y}) \rangle = \sum_{k0}(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{y}). \quad (2.1.3)$$

Матрица $\sum_{k0}(\bar{x})$ в общем случае является эрмитовой, положительно определенной.

Если все РЛС системы работают независимо друг от друга, то эта матрица вырождается в вещественную диагональную. Этот случай, по-видимому, наиболее широко распространен в практически интересных ситуациях. Возможен другой крайний случай, когда все входящие в систему РЛС абсолютно когерентны. Такая ситуация может иметь место при работе всех станций от общей РЛС подсвета и достаточно близких ракурсах наблюдения. В этом случае $\sum_{k0}(\bar{x})$ вырождается в вещественную матрицу с равными элементами, что дает возможность представить ее в виде

$$\sum_{k0}(\bar{x}) = \sigma_{k0}^2(\bar{x}) \bar{e}_0 \bar{e}_0^T, \quad (2.1.4)$$

где $\sigma_{k0}^2(\bar{x})$ - распределение дисперсии диффузионной составляющей функции отражения по поверхности цели k -го класса; \bar{e}_0 - p -компонентный вектор-столбец, все элементы которого равны единице.

Для описания статистических свойств отраженных сигналов в литературе, как правило, используются три модели [1]:

- детерминированные отражения;
- для каждой "блестящей точки" амплитуда детерминирована, в то время как фаза случайна и равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$;
- для каждой "блестящей точки" отраженный сигнал случаен и подчинен нормальному распределению плотности вероятности с нулевым математическим ожиданием.

При характерном для космических РСА времени наблюдения (менее 1 секунды) диффузионную составляющую можно считать квазидетерминированной, то есть случайной, но не изменяющейся за время наблюдения. Аналогичное предположение может быть высказано относительно функций отражения для "блестящих точек". При этом основным отличием "блестящих точек" от диффузионной составляющей функции

отражения является их дискретный характер. Кроме того, суммарная ЭПР "блестящих точек" обычно предполагается много большей ЭПР поверхности цели и составляет до 80% всей ЭПР цели [2]. Далее предполагаем, что функция отражения нормирована к суммарной ЭПР k -й цели таким образом, что выполняется равенство:

$$\iint \langle 0,5 \rangle f_k^p(\bar{x}) f_k^{p*}(\bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = 1 \quad (2.1.5)$$

Введем модель сигнала, принимаемого совокупностью РЛС. Будем считать радиолокационные станции, входящие в систему наблюдения, в общем случае бистатистическими. Принимаемый отраженный сигнал представим в виде p -компонентного вектора комплексных амплитуд, для составляющих которого справедливо выражение:

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) = U_{kh} \int_{\Omega_k} \dot{f}_k^p(\bar{x}) \frac{g_{1p}(\bar{x}, t) g_{2p}(\bar{x}, t)}{r_{1p}(\bar{x}, t) r_{2p}(\bar{x}, t)} \dot{s}_p \left\{ t - [r_{1p}(\bar{x}, t) + r_{2p}(\bar{x}, t)] / c \right\} * \\ * \exp \left\{ -jk_p [r_{1p}(\bar{x}, t) + r_{2p}(\bar{x}, t)] \right\} d\bar{x} + N_p(t) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

В приведенном выражении $g_{1p}(\bar{x}, t)$, $g_{2p}(\bar{x}, t)$ - значения нормированных диаграмм направленности передающей и приемной антенн p -й РЛС в направлении точки цели \bar{x} в момент времени t ; $r_{1p}(\bar{x}, t)$, $r_{2p}(\bar{x}, t)$ - текущее значение дальности от передатчика и приемника p -й РЛС до точки \bar{x} цели; $s_p(t)$ - комплексная амплитуда модулирующей функции зондирующего сигнала p -й РЛС, которую в дальнейшем считаем импульсной с длительностью импульса τ_p и периодом повторения T_p и нормированной таким образом, что выполняется условие:

$$\frac{1}{\tau_p} \int |s_p(t)|^2 dt = 1 \quad (2.1.7)$$

$N_p(t)$ - комплексная амплитуда аддитивного шума радиолокационного тракта для p -й РЛС; $k_p = 2\pi/\lambda$ - волновое число.

Время наблюдения цели каждой РЛС системы ограничено и равно T_{op} .

С учетом нормировок (3.1.5) и (3.1.7) вещественный множитель U_{kp} имеет вид [3]:

$$U_{kp} = \sqrt{\frac{2P_{po} \lambda_p^2 G_{1p} G_{2p}}{(4\pi)^3} (\sigma_{k\varepsilon}^p)^2} \quad (2.1.8)$$

где P_{po} - импульсная мощность зондирующего сигнала p -й РЛС; G_{1p} , G_{2p} - коэффициент направленного действия (КНД) передающей и приемной антенн p -й РЛС; $\sigma_{k\varepsilon}^p$ - суммарная ЭПР k -й цели при приеме сигнала p -й РЛС.

Введем диагональные матрицы размерности $p \times p$:

$$\begin{aligned}
G(\bar{x}, t) &= \text{diag} [G_1(\bar{x}, t), G_2(\bar{x}, t), \dots, G_p(\bar{x}, t)] \\
S(\bar{x}, t) &= \text{diag} [S_1(\bar{x}, t), S_2(\bar{x}, t), \dots, S_p(\bar{x}, t)] \\
E(\bar{x}, t) &= \text{diag} [E_1(\bar{x}, t), E_2(\bar{x}, t), \dots, E_p(\bar{x}, t)] \\
U_k &= \text{diag} [U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{kp}]
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

$$G_p(\bar{x}, t) = \frac{g_{1p}(\bar{x}, t)g_{1p}(\bar{x}, t)}{r_{1p}(\bar{x}, t)r_{1p}(\bar{x}, t)} \tag{2.1.10}$$

$$S_p(\bar{x}, t) = s_p \{t - [r_{1p}(\bar{x}, t) + r_{2p}(\bar{x}, t)]/c\} \tag{2.1.11}$$

$$E_p(\bar{x}, t) = \exp \{-jk_p [r_{1p}(\bar{x}, t) + r_{2p}(\bar{x}, t)]/c\} \tag{2.1.12}$$

Используя (2.1.2), вектор комплексных амплитуд принимаемых сигналов можно представить в виде суммы:

$$\bar{U}(t) = \bar{U}_{k0}(t) + \bar{U}_{k\sigma}(t) + \bar{N}(t) \tag{2.1.13}$$

В последнем выражении приняты следующие обозначения:

$$\bar{U}_{k0}(t) = U_k \int G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t) f_{k0}(\bar{x}) d\bar{x} \tag{2.1.14}$$

$$\bar{U}_{k\sigma}(t) = U_k \int G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t) f_{k\sigma}(\bar{x}) d\bar{x} \tag{2.1.15}$$

Компоненты вектора комплексных амплитуд аддитивного шума радиолокационного тракта

$$N(t) = \{N_1(t), N_2(t), \dots, N_p(t)\} \tag{2.1.16}$$

будем считать гауссовскими белыми и статистически независимыми между собой. Вектор $N(t)$ учитывает, как шумы приемников радиолокационных станций, так и сигналы, отраженные статистически однородной подстилающей поверхностью.

Из (2.1.6) следует, что для полного описания принимаемых сигналов необходимо в явном виде знать зависимость дальностей r_1 и r_2 от координат отражающей точки и текущего времени.

На рис. 2.1 движения носителей передающей (Прд.р) и приемной (Прм.р) частот p -й РЛС описываются в основной системе координат $OXYZ$ радиус-векторами $\bar{r}_1^p(t)$ и $\bar{r}_2^p(t)$. Движение центра масс наблюдаемой цели характеризуется радиус-вектором $r(t)$. Для описания движения произвольной точки \bar{x} цели относительно центра масс в основной системе координат используем вектор $\bar{\rho}_p(\bar{x}, t)$. В произвольный момент времени t связь векторов $\bar{\rho}_p(\bar{x}, t)$ и \bar{x} задается выражением

$$\bar{\rho}_p(\bar{x}, t_i) = A_p(t_i) \bar{x} \tag{2.1.17}$$

где $A_p(t_i)$ - матрица поворота осей вспомогательной системы координат относительно основной системы 0XYZ в момент t_i . Индекс "p" в приведенных выше обозначениях векторов соответствует порядковому номеру РЛС в системе и позволяет учесть не только отличия траекторий движения носителей РЛС, но и возможное изменение характера движения ПРЦ при наблюдении ее различными станциями системы на неперекрывающихся интервалах времени (например, одной РЛС при разных циклах обзора).

Без учета смещения носителей приемной и передающей частот РЛС за время распространения сигнала до цели и обратно искомые зависимости описываются выражениями:

$$r_{1p}(\bar{x}, t) = |\bar{r}_{0p}(t) + \bar{\rho}_p(\bar{x}, t) - \bar{r}_1^p(t)| \quad (2.1.18)$$

$$r_{2p}(\bar{x}, t) = |\bar{r}_{0p}(t) + \bar{\rho}_p(\bar{x}, t) - \bar{r}_2^p(t)| \quad (2.1.19)$$

Поскольку формулы (2.1.18) и (2.1.19) отличаются только индексами, то дальнейшие выкладки выполнены лишь для первой из них.

Разложим (2.1.18) в ряд Тейлора в окрестности точки t_{0p} , соответствующей середине интервала наблюдения цели p-й РЛС

$$r_{1p}(\bar{x}, t) = r_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} r_{1p}^{(i)}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot (t - t_{0p})^i \quad (2.1.20)$$

здесь $r_{1p}^{(i)}(\bar{x}, t_{0p})$ - значение i-й производной функции $r_{1p}(\bar{x}, t)$ по времени в момент $t=t_{0p}$.

Используя правила дифференцирования векторов и их модулей, получим выражения для первых четырех производных:

$$r_{1p}^{(1)}(\bar{x}, t_{0p}) = \bar{e}_{1p}^{(i)}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot \bar{v}_{1p}^{(i)}(\bar{x}, t_{0p}) \quad (2.1.21)$$

$$r_{1p}^{(2)}(\bar{x}, t_{0p}) = \frac{|\bar{v}_{1p}(\bar{x}, t_{0p})|^2 - |r_{1p}^{(1)}(\bar{x}, t_{0p})|^2}{|r_{1p}(\bar{x}, t_{0p})|} + \bar{e}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot \bar{A}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \quad (2.1.22)$$

$$r_{1p}^{(3)}(\bar{x}, t_{0p}) = 3 \frac{\bar{v}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot \bar{A}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) - r_{1p}^{(1)}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot r_{1p}^{(2)}(\bar{x}, t_{0p})}{|r_{1p}(\bar{x}, t_{0p})|} + \bar{e}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot \bar{W}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \quad (2.1.23)$$

$$r_{1p}^{(4)}(\bar{x}, t_{0p}) = 3 \frac{|\bar{A}_{1p}(\bar{x}, t_{0p})|^2 - |r_{1p}^{(2)}(\bar{x}, t_{0p})|^2}{|r_{1p}(\bar{x}, t_{0p})|} + \quad (2.1.24)$$

$$4 \frac{\bar{v}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot \bar{W}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) - r_{1p}^{(1)}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot r_{1p}^{(3)}(\bar{x}, t_{0p})}{|r_{1p}(\bar{x}, t_{0p})|} + \bar{e}_{1p}(\bar{x}, t_{0p}) \cdot \bar{B}_{1p}(\bar{x}, t_{0p})$$

$$\bar{e}_{1p}(x, t_{0p}) = \frac{\bar{r}_{0p}(t_{0p}) + \bar{\rho}_p(\bar{x}, t_{0p}) - \bar{r}_1^p(t_{0p})}{|\bar{r}_{0p}(t_{0p}) + \bar{\rho}_p(\bar{x}, t_{0p}) - \bar{r}_1^p(t_{0p})|} \quad (2.1.25)$$

- единичный вектор визирования точки \bar{x} в момент времени t ,

$$\bar{V}_{1p}(x, t) = \frac{d}{dt} [\bar{r}_{0p}(t) + \bar{\rho}_p(\bar{x}, t) - \bar{r}_1^p(t)] \quad (2.1.26)$$

$$\bar{A}_{1p}(\bar{x}, t) = \frac{d}{dt} [\bar{V}_{1p}(x, t)] \quad (2.1.27)$$

$$\bar{W}_{1p}(\bar{x}, t) = \frac{d}{dt} [\bar{A}_{1p}(x, t)] \quad (2.1.28)$$

$$\bar{B}_{1p}(\bar{x}, t) = \frac{d}{dt} [\bar{W}_{1p}(x, t)] \quad (2.1.29)$$

Полученные соотношения достаточно компактны и при наличии данных о параметрах траекторий движения носителей РЛС и цели могут быть использованы для решения задач синтеза и анализа алгоритмов обнаружения, измерения параметров и классификации ПРЦ.

2.2. Многоальтернативная проверка гипотез относительно различных классов ПРЦ при их наблюдении совокупностью космических радиолокационных средств

Проблема определения класса цели может быть формализована в рамках классической теории многоальтернативной проверки статистических гипотез. По одной из них вектор принимаемых колебаний $\bar{U}(t)$ порожден только шумом. Остальные гипотезы соответствуют наблюдению на фоне шумов различных классов целей. Общее число возможных классов – M , число гипотез – $(M+1)$.

Если все существенные параметры (скорости движения РЛС и ПРЦ, координаты, ракурсы, распределения «блестящих точек» и диффузионной составляющей ЭПР по поверхности цели) точно известны для каждого из распознаваемых классов, то классическое решение задачи многоальтернативной проверки гипотез приводит к структуре устройства обработки принимаемых сигналов, состоящей из M параллельных каналов формирования отношения правдоподобия или его логарифма

$$l_k[\bar{U}(t)] = \ln\{L_k[\bar{U}(t)]\},$$

и решающего устройства, на M входов которого поступают значения l_k . Решающее устройство выносит решение в пользу одной из M целей. Способ принятия решения зависит от выбранного критерия качества. При минимизации среднего риска процедура вынесения решения предусматривает проверку системы линейных неравенств, учитывающих априорные вероятности и конкретный вид матрицы потерь. При использовании критерия максимального правдоподобия решение выносится в пользу

гипотезы с максимальным значением l_k . В любом случае наибольший практический интерес представляет процедура формирования отношения правдоподобия и структурная схема устройства, реализующего это отношение.

Достаточная статистика для принятия решения представляет собой вектор, составленный из отношений правдоподобия для каждой из M конкурирующих гипотез. Логарифм отношения правдоподобия для k -й гипотезы при отсутствии флуктуаций сигналов, отраженных «блестящими точками», может быть записан в виде [4]:

$$l_k[\bar{U}(t)] = \left\{ 0,5 \iint \bar{U}^*(t) Q_0(t, u) \bar{U}(u) dt du - \right. \\ \left. - \iint [\bar{U}^*(t) - \bar{U}_{k\sigma}^*(t)] Q_k(t, u) [\bar{U}(u) - \bar{U}_{k\sigma}(u)] dt du - \ln(K_0/K_k) \right\}, \quad (2.2.1)$$

где K_0 и K_k – нормирующие коэффициенты функционалов плотности распределения вероятностей для случаев наблюдения только шума и k -й цели на фоне шума; $Q_0(t, u)$, $Q_k(t, u)$ – комплексные матрицы, обратные матрицам взаимной корреляции принимаемого вектора $\bar{U}(t)$ для гипотез о наблюдении только шума $R(t, u)$ и k -й цели на фоне шума $R_k(t, u)$.

Поскольку шум и диффузионная составляющая принимаемого сигнала $\bar{U}_{k0}(t)$ являются независимыми случайными процессами, то

$$R_k(t, u) = R_{k0}(t, u) + R_0(t, u), \quad (2.2.2)$$

$$\text{где} \quad R_{k0}(t, u) = \langle 0,5 \bar{U}_{k\sigma}(t) + \bar{U}_{k\sigma}^*(u) \rangle \quad (2.2.3)$$

– матрица корреляционных функций диффузионных составляющих вектора принимаемого сигнала.

Для определения вида матриц $Q_0(t, u)$ и $Q_k(t, u)$ следует воспользоваться интегрально-матричными уравнениями обращения:

$$\int R_0(t, u) Q_0(u, v) du = I \delta(t - v); \quad (2.2.4)$$

$$\int R_k(t, u) Q_k(u, v) du = I \delta(t - v), \quad (2.2.5)$$

где I – единичная диагональная матрица.

Для последнего слагаемого в (2.2.1) справедливо равенство:

$$\ln(K_0/K_k) = Sp \int_0^1 \frac{dA}{A} \iint R_0(t, u) Q_{Ak}(u, t) dt du, \quad (2.2.6)$$

где $Q_{Ak}(u, t)$ – решение интегрально-матричного уравнения:

$$\iint [R_0(t_1, u) + AR_{k0}(t_1, u)] Q_{Ak}(u, v) R_0(v, t_2) du dv = AR_{k0}(t_1, t_2) \quad (2.2.7)$$

При условии, что шум радиолокационного тракта «белый» с диагональной матрицей спектральных плотностей N_0 выражения (2.2.4–2.2.7) упрощаются:

$$Q_0(t, u) = N_0^{-1} \delta(t, u), \quad (2.2.8)$$

$$\int R_{k0}(t, u)Q_k(u, v)du + N_0Q_k(t, v) = I\delta(t - v) \quad (2.2.9)$$

$$\ln(K_0/K_k) = Sp \int \frac{dA}{A} \int N_0Q_{Ak}(t, t)dt, \quad (2.2.10)$$

$$N_0Q_{Ak}(t, v)N_0 + A \int R_{k0}(t, u)Q_{Ak}(u, v)N_0du = AR_{k0}(t, v). \quad (2.2.11)$$

Пользуясь рекомендациями [4], ищем матрицу $Q_k(t, u)$ в виде

$$Q_k(t, u) = N_0^{-1}[I\delta(t - u) - Q_{k0}(t, u)], \quad (2.2.12)$$

В этом случае равенство (2.9) преобразуется следующим образом:

$$\int R_{k0}(t, u)N_0^{-1}Q_{k0}(u, v)du + Q_{k0}(t, v) = R_{k0}(t, v)N_0^{-1}. \quad (2.2.13)$$

Сравнение (2.2.11) с (2.2.13) показывает, что матрица $Q_{k0}(t, u)$ может быть найдена путем решения (2.2.11) при $A = 1$, т.е.

$$Q_{k0}(t, u) = N_0Q_{Ak}(t, u)|_{A=1}. \quad (2.2.14)$$

Подставляя (2.2.8) в (2.2.1), получим:

$$I_k[\bar{U}(t)] = 0,5 \left\{ \iint [\bar{U}^*(t) - \bar{U}_{k\sigma}^*(t)]N_0^{-1}Q_{k0}(t, u)[\bar{U}(u) - \bar{U}_{k\sigma}(u)]dt du - \right. \\ \left. - \int \bar{U}_{k\sigma}^*(t)N_0^{-1}\bar{U}_{k\sigma}(t)dt + 2Re[\int \bar{U}_{k\sigma}^*(t)N_0^{-1}\bar{U}(t)dt] - \ln(K_0/K_k) \right\} \quad (2.2.15)$$

Последнее выражение позволяет представить один из возможных вариантов структуры устройства формирования логарифма отношения правдоподобия для k -й гипотезы (рис. 2.2). Из (2.2.15) и рис. 2.2 следует, что основу устройства формирования $I_k[\bar{U}(t)]$ составляют два корреляционных канала. В одном из них вычисляется корреляция принимаемой реализации вектора $\bar{U}(t)$, нормированного к мощности шумов, с вектором ожидаемого сигнала, порожденного «блестящими точками» k -й цели $\bar{U}_{k\sigma}(t)$. Во втором канале разностный сигнал $\bar{U}(t) - \bar{U}_{k\sigma}(t)$ коррелируется с вектором

$$\int Q_{k0}(t, u)[\bar{U}(u) - \bar{U}_{k\sigma}(u)]du,$$

который представляет собой оценку диффузионной составляющей принимаемого сигнала в предположении о наблюдении k -й цели.

Дальнейшая конкретизация алгоритма формирования логарифма отношения правдоподобия и структуры реализующего его устройства возможна лишь при определении матриц $Q_{Ak}(t, u)$ и $Q_{k0}(t, u)$, для чего необходимо решить уравнение (2.2.11). Прежде всего выясним вид корреляционной функции $R_{k0}(t, u)$. Используя (2.2.14) и (2.2.3), получим:

$$R_{k0}(t, u) = \langle 0,5\bar{U}_{k\sigma}(t) + \bar{U}_{k\sigma}^*(u) \rangle = \\ = \int_{\Omega_k} U_k G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t) \sum_{k0}(\bar{x}) E^*(\bar{x}, t) S^*(\bar{x}, t) G(\bar{x}, t) U_k d\bar{x} \quad (2.2.16)$$

Воспользовавшись широко известным приемом [5], будем искать $Q_{Ak}(t, u)$ в виде, аналогичном (2.2.16):

$$Q_{Ak}(t, u) = \iint_{\Omega_k} N_0^{-1} U_k G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t) H_{Ak}(\bar{x}, \bar{y}) * \\ * E^*(\bar{y}, u) S^*(\bar{y}, u) G^*(\bar{y}, u) U_k N_0^{-1} dx dy \quad (2.2.17)$$

После подстановки (2.2.16, 2.2.17) уравнение (2.2.11) может быть представлено в виде

$$H_{Ak}(\bar{x}, \bar{y}) + A \sum_{k0} (\bar{x}) U_k N_0^{-1} U_k \int \Psi^0(\bar{x}, \bar{z}) H_{Ak}(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{z} = \\ = A \sum_{k0} (\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (2.2.18)$$

где введена матрица $(p \times p)$

$$\Psi^0(\bar{x}, z) = \int E^*(\bar{x}, u) S^*(\bar{x}, u) G^*(\bar{x}, u) G(\bar{z}, u) S(\bar{z}, u) E(\bar{z}, u) du. \quad (2.2.19)$$

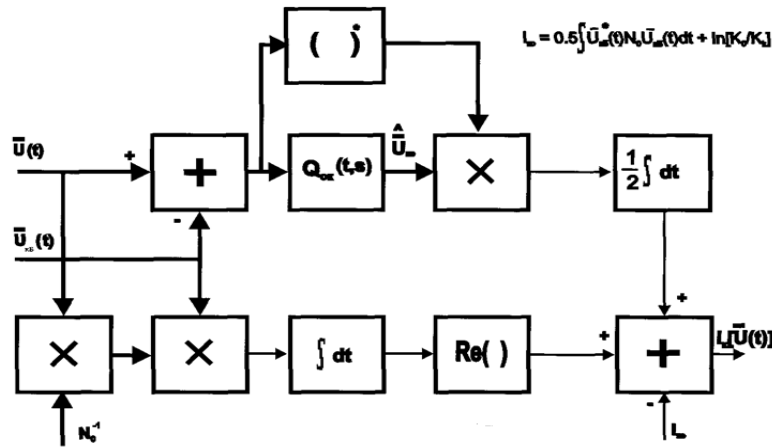


Рис. 2.2. Вариант структурной схемы устройства формирования логарифма отношения правдоподобия

Подстановка (2.2.17) в (2.2.15) дает следующий результат:

$$I_k[\bar{U}(t)] = 0,5 \left\{ \iint_{\Omega_k} [\bar{F}^*(\bar{x}) - \bar{F}_{k\sigma}^*(\bar{x})] N_0^{-1} U_k H_{k0}(\bar{x}, \bar{y}) U_k N_0^{-1} \right. \\ \left. [\bar{F}^*(\bar{y}) - \bar{F}_{k\sigma}^*(\bar{y})] d\bar{x} d\bar{y} + 2Re \left[\int \bar{U}_{k\sigma}^*(t) N_0^{-1} \bar{U}(t) dt \right] - \right. \\ \left. - \int \bar{U}_{k\sigma}^*(t) N_0^{-1} \bar{U}_{k\sigma}(t) dt - \ln(K_0/K_k) \right\}; \quad (2.2.20)$$

$$H_{k0}(\bar{x}, \bar{y}) = H_{Ak}(\bar{x}, \bar{y})|_{A=1}; \quad (2.2.21)$$

$$ESG(\bar{x}, u) = E(\bar{x}, u) S(\bar{x}, u) G(\bar{x}, u). \quad (2.2.23)$$

Используя (2.2.15), преобразуем второе и третье слагаемые в фигурных скобках (2.2.20). В результате получим:

$$I_k[\bar{U}(t)] = 0,5 \left\{ \iint_{\Omega_k} [\bar{F}^*(x) - \bar{F}_{k\sigma}^*(x)] N_0^{-1} U_k H_{k0}(\bar{x}, \bar{y}) U_k N_0^{-1} \right.$$

$$\text{Ч}[\bar{F}(\bar{y}) - \bar{F}_{k\sigma}(\bar{y})]d\bar{x}d\bar{y} + 2\text{Re}[\int \bar{f}_{k\sigma}^*(\bar{x}) U_k N_0^{-1} \bar{F}(\bar{x}) d\bar{x}]. \quad (2.2.24)$$

Кратко рассмотрим смысл введенных функций $\Psi^0(\bar{x}, \bar{z})$, $\bar{F}(\bar{x})$ и $\bar{F}_{k\sigma}(\bar{x})$.

Поскольку произведение

$$U_{kp} G_p(\bar{x}, t) S_p(\bar{x}, t) E_p(\bar{x}, t)$$

представляет собой траекторный сигнал, принимаемый p -й РЛС от точечной цели с координатой \bar{x} , то диагональные элементы матрицы $\Psi^0(\bar{x}, \bar{z})$ следует трактовать как нормированные к U_{kp}^2 функции неопределенности траекторного сигнала соответствующих РЛС.

Рассмотрим p -ю компоненту вектора $\bar{F}(\bar{x})$. При отсутствии шума с учетом (2.2.6) имеем:

$$\bar{F}_p(x) = U_{kp} \int_{\Omega_k} \Psi_p^0(\bar{x}, \bar{z}) f_k^p(\bar{z}) d\bar{z}. \quad (2.2.25)$$

Как следует из полученного выражения, при отсутствии аддитивных шумов функция $\bar{F}_p(\bar{x})$ с точностью, зависящей только от функции неопределенности $\Psi_p^0(\bar{x}, \bar{z})$ траекторного сигнала для p -й РЛС, восстанавливает функцию отражения наблюдаемой цели. Функцию $\bar{F}_p(\bar{x})$ будем называть комплексным радиолокационным изображением объекта наблюдения, получаемым по данным p -й РЛС. Компоненты вектора $\bar{F}_{k\sigma}(\bar{x})$ следует рассматривать как изображения, порожденные только совокупностью «блестящих точек» цели k -го класса без учета шумов и диффузионной составляющей: отраженного сигнала.

Полученные выражения (2.2.22–2.2.24) дают возможность представить структуру устройства формирования логарифма отношения правдоподобия в виде, отличном от ранее описанного (см. рис. 2.3.). При этом вся обработка может быть разделена на два этапа. На первом этапе вектор принимаемых сигналов $\bar{U}(t)$ преобразуется в вектор комплексных РЛИ наблюдаемой цели. Поскольку матрицы, используемые для этого преобразования, являются диагональными, перекрестные связи между РЛС системы на этом этапе отсутствуют. На втором этапе элементы вектора комплексных РЛИ нормируются к спектральным плотностям аддитивных шумов и обрабатываются в соответствии с алгоритмом (2.2.24).

Для выяснения физического смысла интеграла

$$\int H_{k0}(\bar{x}, \bar{y}) U_k N_0^{-1} [\bar{F}(\bar{y}) - \bar{F}_{k\sigma}(\bar{y})] d\bar{y}$$

умножим его слева на

$$U_k G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t)$$

и проинтегрируем результат по \bar{x} . Учитывая (2.2.14) и (2.2.17), получим:

$$\begin{aligned} U_k G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t) \int H_{k0}(\bar{x}, \bar{y}) U_k N_0^{-1} [\bar{F}(\bar{y}) - \bar{F}_{k\sigma}(\bar{y})] d\bar{y} = \\ = \int Q_{k0}(t, u) [\bar{U}(u) - \bar{U}_{k\sigma}(u)] du. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Как уже отмечалось, правая часть (2.2.26) представляет собой оценку диффузионной составляющей принимаемого сигнала в предположении о наблюдении k -й цели. Используя (2.2.14), представим эту оценку в виде:

$$U_{k0}^\epsilon(t) = U_k \int G(\bar{x}, t) S(\bar{x}, t) E(\bar{x}, t) f_{k\sigma}^\epsilon(\bar{x}) d\bar{x} \quad (2.2.27)$$

составляющей функции отражения k -й цели по координатам. Сравнение (2.2.26) и (2.2.27) приводит к следующему результату:

$$\int H_{k0}(\bar{x}, \bar{y}) U_k N_0^{-1} [\bar{F}(\bar{y}) - \bar{F}_{k\sigma}(\bar{y})] d\bar{y} = f_{k\sigma}^\epsilon(\bar{x}). \quad (2.2.28)$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл дает оценку диффузионной составляющей функции отражения наблюдаемой цели в предположении о принадлежности ее к k -й гипотезе.

Выполненный синтез показывает, что в случае отсутствия флуктуации сигналов, отраженных «блестящими точками», для вычисления логарифмов отношения правдоподобия, наряду с принимаемыми реализациями сигнала могут и должны быть использованы комплексные РЛИ наблюдаемых целей. При этом обработка изображения заключается в вычислении корреляций его с детерминированной функцией отражения «блестящих точек» k -й цели $\hat{f}_{k\sigma}(\bar{x})$ и оценкой диффузионной составляющей $\bar{f}_p(\bar{x})$.

Реализация подобной системы представляется чрезвычайно сложной, в первую очередь, из-за очень высоких требований к качеству и объему априорных сведений.

Для реализации оптимальной обработки требуется знание числа, координат на поверхности цели и значений ЭПР каждой «блестящей точки», входящей в радиолокационный портрет ПРЦ, при всех значениях ракурса его наблюдения, параметрах качки, рыскания, взаимного расположения и характеристик взаимного перемещения цели и космического аппарата. Названная информация должна быть известна для каждой РЛС, входящей в состав комплекса наблюдения.

Для каждой ПРЦ необходимо знание распределения диффузионной составляющей отражений по координатам его поверхности при всех перечисленных выше условиях.

Получение подобной информации принципиально недостижимо в обозримом будущем, что ставит на повестку дня разработку алгоритмов обработки в максимальной мере сочетающих теоретическую базу оптимального синтеза, приведенного выше, с теми априорными данными, которыми уже располагает разработчик системы классификации и

которые могут быть получены в результате обозримых в будущем экспериментов, опытной и рабочей эксплуатации средств классификации целей.

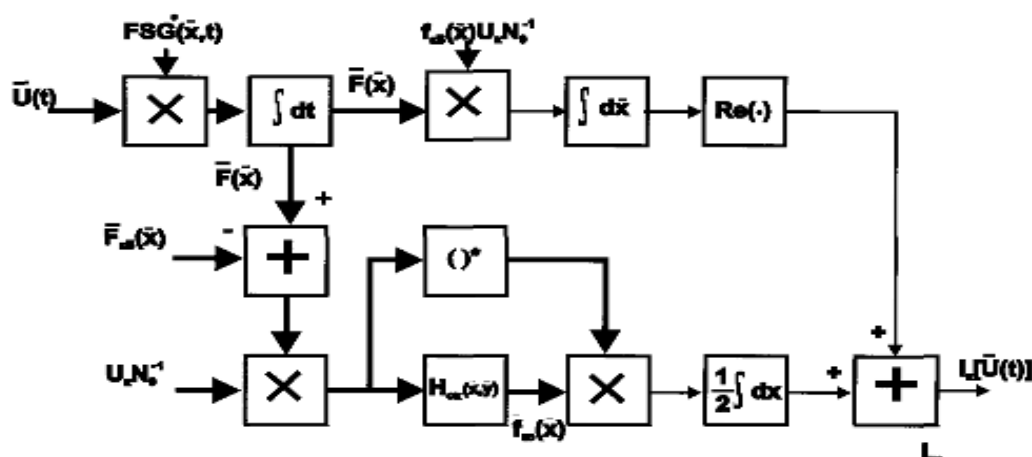


Рис. 2.3. Вариант структурной схемы устройства формирования логарифма отношения правдоподобия

К устойчивым и достоверным сведениям о различиях распознаваемых пространственно-распределённых целей могут быть отнесены:

- а) данные о различиях в размерах (длине и ширине);
- б) данные о различиях в интегральной (общей) ЭПР.

Индивидуальные отличия по характеристикам отражения для отдельных целей, как правило, имеют очень ограниченный характер - единичные радиолокационные портреты (РП) при незначительном числе параметров наблюдения, что исключает возможность создания сколько-нибудь достоверных статистически усредненных баз данных. В связи с этим рабочий алгоритм классификации должен структурно опираться на названные выше достоверные сведения, быть адаптивным, а именно содержать возможность настройки на пополняющиеся априорные данные и параметры, характеризующие каждую конкретную ситуацию наблюдения (оценки ракурса, направления и скорости перемещения цели и других параметров её движения).

Принимая во внимания высказанные соображения, рабочий алгоритм формирования статистик принятия решения не должен требовать индивидуальных радиолокационных портретов (распределения ЭПР «блестящих точек» и диффузионной составляющей по поверхности цели). Считая распределение ЭПР равномерным, приходим к следующему выражению статистики, которая составляет основу принятия решения по любому статистическому критерию

$$I_k = \int_{\Omega_k(j)} |F(\bar{x})|^2 d\bar{x}, \quad (2.2.29)$$

где подчеркнута зависимость области, занятой целью k -го класса от ракурса его наблюдения φ .

Из последнего выражения, в частности, следует, что основными признаками классификации являются оценки области поверхности, занятой целью, то есть по существу оценки его длины и ширины при данном ракурсе, а также оценка интегральной ЭПР отраженного сигнала.

2.3. Квазиоптимальные и эмпирические алгоритмы классификации ПРЦ

В предыдущих разделах описан алгоритм формирования достаточной статистики и получения на её основе признаков классификации ПРЦ при точно известных параметрах, характеризующих взаимное расположение и особенности взаимного перемещения ПРЦ и КА. В реальных условиях с достаточно высокой точностью могут быть известны лишь некоторые из этих параметров, в первую очередь, относящиеся к описанию движения носителя РЛС. Ряд параметров, необходимых для решения задачи распознавания, может быть с достаточной точностью оценен на этапе обнаружения ПРЦ. В частности, в процессе обнаружения могут быть оценены положение центра цели и величина ее радиальной скорости. Вместе с тем, ряд параметров, играющих основную роль для эффективного распознавания (например, ракурс цели и ее угловая скорость вращения), к моменту решения задачи классификации остаются неизвестными.

Объединим параметры, описывающие ракурсы наблюдения цели всеми РЛС системы, в вектор \bar{v} , а из оставшихся параметров выделим вектор известных $\bar{\chi}$ и неизвестных $\bar{\chi}_0$ параметров. При этом оптимальный в смысле максимального правдоподобия алгоритм классификации требует определения логарифмов отношения правдоподобия $I_k[U(t)/\chi_0, \chi, v]$ для всех возможных значений векторов неизвестных параметров и всех классов целей. Процедура нахождения логарифма отношения правдоподобия строится в соответствии с алгоритмом, описанным в разделе 2.1. Основная процедура такого алгоритма заключается в формировании радиолокационного изображения наблюдаемого объекта в системе координат, связанной с геометрическими осями цели, для всех возможных сочетаний параметров χ и v в соответствии с выражением

$$F(\bar{x}/\bar{\chi}, \bar{\chi}_0\bar{v}) = \int E^*(\bar{x}, t/\bar{\chi}, \bar{\chi}_0\bar{v}) S^*(\bar{x}, t/\bar{\chi}, \bar{\chi}_0\bar{v}) G(\bar{x}, t/\bar{\chi}, \bar{\chi}_0\bar{v}) \bar{U}(t) dt \quad (2.3.1)$$

На этапе получения РЛИ знание вектора ракурсов необходимо для задания ориентации осей вспомогательной системы $Oxyz$ в пространстве. Этот факт позволяет

использовать для распознавания изображения, построенные в предположении о совпадении ориентации осей вспомогательной и основной систем координат. Учет истинного положения осей ПРЦ может быть выполнен при формировании статистики $l_k[\bar{U}(t)/\chi_0, \chi, \nu]$. Практическая реализация оптимальных и близких к ним алгоритмов наталкивается на многочисленные трудности, связанные, в первую очередь, с отсутствием необходимой априорной информации о характеристиках отражающих свойств наблюдаемых объектов, характеристиках их движения относительно координатной системы, связанной с ПРЦ. Действительно, оптимальные алгоритмы требуют знания распределения «блестящих точек» (центров отражения) по координатам поверхности корабля при всех возможных на практике условиях наблюдения (изменяющиеся ракурсы, угловые скорости вращения относительно осей ПРЦ, индивидуальные особенности постройки ПРЦ).

Названные соображения вызывают повышенный интерес к поиску более простых и одновременно достаточно эффективных способов классификации ПРЦ. При этом, по-прежнему, определяющим является выбор классификационных признаков, поскольку выбор решающих правил существенно зависит от номенклатуры и свойств этих признаков.

Выше показано, что в рамках типовых ограничений, связанных с априорной неопределённостью о большинстве параметров движения ПРЦ, в качестве вектора признаков целесообразно выбирать вектор следующего вида:

$$l_k = \int_{\Omega_k(\varphi)} |F(\bar{x})|^2 d\bar{x},$$

где k меняется от 1 до числа классов M .

Дальнейшее упрощение может быть связано с отказом от использования вектора признаков, размерность которого равна числу распознаваемых классов, и переходом к скалярной величине, равной суммарной ЭПР РЛИ, полученной интегрированием по области изображения, в пределах которой отсчеты РЛИ превышают некоторый порог F , устанавливаемый, например, адаптивно по величине оцененной ЭПР подстилающей поверхности, «не занятой» целью.

Указанный признак может быть получен в соответствии с выражением

$$V^p = \int |F_{pH}(\bar{x})|^2 1[|F_{pH}(\bar{x})| - F_{0p}] d\bar{x}; \quad (2.3.2)$$

$$|F_{pH}(x)|^2 = \frac{|F_{pH}(x)|^2}{N_{0p}} \quad (2.3.3)$$

– нормированное к величине ЭПР водной поверхности и шума РЛИ наблюдаемой цели;

$1[\cdot]$ – функция Хевисайда.

Признак V^p может быть условно назван «объемом РЛИ». Ещё более простой признак формируется из «объема» при замене квадратов модуля РЛИ единицами. Такой признак по существу представляет собой оценку площади РЛИ ПРЦ при заданном пороге F :

$$S^p = \int [1[|F_{pH}(\bar{x})| - F_{0p}]] dx. \quad (2.3.4)$$

Для целей, отношение длины которых к ширине примерно одинаково, вместо площади РЛИ может быть использована оценка длины ПРЦ, определяемая по формуле

$$D^p = \sqrt{(L_R^p)^2 + (L_X^p)^2}, \quad (2.3.5)$$

где L_R^p и L_H^p – длины РЛИ, формируемого p -й РЛС, по дальности и азимуту.

Очевидно, что каждая из величин, входящая в (2.3.5) может рассматриваться как признак, используемый для классификации.

Описанные признаки V^p , S^p , D^p, L_R^p , L_H^p , называются в дальнейшем геометрическими. При их использовании решение в общем случае выносится по данным всех P РЛС. Такой способ принятия решения отрицательно сказывается на автономности функционирования каждой отдельной радиолокационной станции. Поэтому при независимости входящих в систему станций целесообразно выносить частное решение каждой отдельной РЛС с последующим объединением решений методами «голосования» [6].

Рассмотрим другую группу признаков. Отказываясь от детальной обработки РЛИ (в связи с упомянутым выше отсутствием достаточных априорных сведений), сохраним в качестве основной исходной информации РЛИ наблюдаемой цели в виде квадрата модуля комплексного изображения: $|\bar{F}_p(\bar{x})/\bar{\chi}_0, \bar{\chi}|$. Один из путей построения системы признаков в этом случае заключается в использовании собственно отсчетов формируемого РЛИ. Для сокращения размерности вектора признаков можно воспользоваться различными функционалами, построенными на пространстве признаков, в частности, моментами РЛИ, которые были предложены для модели зрительного восприятия человека в 60-х годах [3]. Вычисление начального момента $r+q$ -го порядка осуществляется в соответствии с выражением

$$m_{rq}^p = \iint x^r y^q |F_p(x, y)|^2 dx dy, \quad (2.3.6)$$

где x и y – координаты РЛИ.

Моменты (2.3.6) представляют собой не что иное, как коэффициенты в разложении спектральной плотности РЛИ в ряд Тейлора. Отсюда следует, что выбор достаточного числа моментов позволяет описать РЛИ с любой наперед заданной точностью. В то же время наиболее существенными и информативными являются моменты относительно невысоких порядков, что позволяет существенно сократить размерность вектора признаков по сравнению с исходным числом отсчетов формируемого РЛИ.

Использование моментов в качестве признаков привлекательно еще и из тех соображений, что на их основе могут быть построены инварианты к аффинным преобразованиям (сдвиг, поворот и изменение масштаба). Следует, однако, иметь в виду, что создание инвариантов ко всем видам возможных искажений РЛИ принципиально не представляется возможным [7], поскольку при изменении ракурса наблюдения, например, меняется содержание РЛИ, а не его геометрические характеристики.

Поскольку изображение ПРЦ в общем случае сдвинуто относительно центра кадра, представляется целесообразным использовать центральные моменты РЛИ, инвариантные к этому типу искажений:

$$\mu_{rq}^p = \iint \{x - x_0^p\}^r \{y - y_0^p\}^q |F_p(x, y)|^2 dx dy; \quad (2.3.7)$$

где $x_0^p = \frac{m_{10}^p}{m_{00}^p}$, $y_0^p = \frac{m_{01}^p}{m_{00}^p}$, – координаты центра тяжести РЛИ.

Следует отметить, что при наблюдении цели в разное время даже при одинаковом ракурсе ее РЛИ могут отличаться на постоянный множитель

$$F_p(x, y, /t_1) = C \times F_p(x, y, /t_2). \quad (2.3.8)$$

Источниками названных искажений могут быть: неравномерность ДН антенны РЛС по дальности и изменение коэффициента усиления приемника РЛС во времени за счет АРУ по шумам, регулирующей усиление в зависимости от метеоусловий в районе наблюдения. Для устранения искажений 2.3.(8) следует воспользоваться нормированными центральными моментами:

$$M_{rq}^p = \frac{\mu_{rq}^p}{\mu_{00}^p}. \quad (2.3.9)$$

Для уменьшения влияния шумов на формирование признаков, основанных на вычислении моментов, интегрирование в (2.3.7) следует проводить в пределах области, где модуль РЛИ превышает заранее установленный порог F_{0p} , т.е.

$$\mu_{p\theta}^{\pi} = \iint \{\xi - \xi_0^{\pi}\}^p \{\Psi - \Psi_0^{\pi}\}^{\theta} |\Phi_{\pi H}(\xi, \Psi)|^2 |1[|\Phi_{\pi H}(\xi, \Psi)| - \Phi_{0\pi}] \delta \xi \delta \Psi. \quad (2.3.10)$$

Обратим внимание на тот факт, что при $r = q = 0$ (2.3.2) и (2.3.10) совпадают, т.е.

$$\mu_{00}^P = V^P. \quad (2.3.11)$$

Рассмотрим теперь правила вынесения решений, которые могут использоваться для принятия решения о типе наблюдаемого ПРЦ по геометрическим признакам и признакам, основанным на вычислении моментов. Надо сказать, что геометрические признаки требуют для их использования минимальной априорной информации, и в связи с этим являются весьма «грубыми». Любой из этих признаков ставит в соответствие сложному объекту, каким является ПРЦ, одно число, в той или иной степени отражающее размеры цели и ее суммарную ЭПР. Поскольку эффективная поверхность цели существенно зависит от ракурса, а размеры РЛИ определяются как величиной порога, так и условиями наблюдения, в частности, состоянием морской поверхности и, как следствие, уровнем порога, применение геометрических признаков особенно целесообразно при наблюдении группы ПРЦ под одним ракурсом. Таким требованиям удовлетворяет случай слежения за ордером ПРЦ при его движении в одном направлении.

Для каждого ПРЦ из наблюдаемого ордера формируется РЛИ, на основе которого определяется значение одного из геометрических признаков. Для примера будем считать, что этот признак – «объем РЛИ» – V^P . В результате получим вектор

$$V^P = \{V_1^P, V_2^P, \dots, V_{N_{гр}}^P\}$$

где $N_{гр}$ – число целей в группе – ордере. Среди компонентов этого вектора определяются наименьшее V_{min}^P и наибольшее V_{max}^P значения, которые используются для вычисления двух адаптивных порогов – нижнего

$$V_H^P = V_{min}^P + \alpha_H \{V_{max}^P - V_{min}^P\}$$

и верхнего

$$V_B^P = V_{max}^P - \alpha_B \{V_{max}^P - V_{min}^P\},$$

где α_B и α_H – положительные константы.

Решение о принадлежности i -й цели ордера к одному из трех возможных классов выносится путем сравнения V_i^P с порогами V_H^P и V_B^P .

Если $V_i^P > V_B^P$, то цель относится к классу «больших». При $V_i^P < V_B^P$ наблюдаемая цель относится к классу «малых». Остальные ПРЦ относятся к «среднему» классу.

Моменты РЛИ описывают изображение цели значительно более подробно, поэтому они могут быть использованы для распознавания ПРЦ не только в составе ордера но и по

одиночным РЛИ. Решение в этом случае может быть вынесено по сформированному вектору признаков различными способами, пять из которых описаны ниже. Приведенные правила являются наиболее употребительными [8], причем выбор конкретного правила должен производиться в процессе анализа алгоритмов классификации.

Правило 1. Предполагая вектор признаков \bar{X} гауссовским с вектором средних значений M и ковариационной матрицей H (k – номер класса целей), запишем правило решения по максимуму правдоподобия

$$\hat{k} = \arg \min_k \left\{ (\bar{X} - \bar{M}_k^*)^m (R_k^*)^{-1} (\bar{X} - \bar{M}_k^*) + \ln [\det(R_k^*)] \right\} \quad (2.3.12)$$

Правило 2. Это правило отличается от предыдущего тем, что при вычислении квадратичной формы и определителя в (2.3.12) учитываются только диагональные члены ковариационной матрицы R_k^*

$$\hat{k} = \arg \min_k \left\{ \sum_i \frac{(X_i - M_{ki}^*)^2}{\sigma_{ki}^{*2}} + 2 \ln(\sigma_{ki}^*) \right\}, \quad (2.3.13)$$

где X_i, M_{ki}^* – i -е компоненты вектора признаков и средних значений, соответствующие k -й цели; σ_{ki}^* – дисперсия i -го компонента вектора признаков для цели k -го класса.

Правило 3 опирается на метод k ближайших соседей, суть которого состоит в следующем. В пространстве признаков вычисляется расстояние от точки, задаваемой вектором X , до каждой из точек классифицированной обучающей выборки. Все точки обучающей выборки ранжируются по возрастанию вычисленного расстояния. Вслед за этим выбираются k первых членов ранжированной последовательности (ближайшие соседи) и подсчитывается число соседей, относящихся к каждому из классов. Решение выносится в пользу того класса, к которому относится наибольшее число «ближайших соседей».

Правило 4. В соответствии с этим правилом решение принимается по минимуму эвклидова расстояния в пространстве признаков от точки, заданной вектором X , до точек, определяемых векторами средних значений для каждой цели. При этом решение выбирается в соответствии с алгоритмом

$$\hat{k} = \arg \min_k \left\{ \sum_i (X_i - M_{ki}^*)^2 \right\}, \quad (2.3.14)$$

который является частным случаем правила 2 при $(\sigma_{ki}^*)^2 = 1$.

Правило 5. Предусматривает минимизацию среднего расстояния от точки, заданной вектором X до точек обучающей выборки i -го класса. Усреднение производится по всем обучающим выборкам

$$\hat{k} = \arg \min \left\{ \sum_j \sqrt{\sum_i (X_i - X_{ik}^j)^2} \right\}, \quad (2.3.15)$$

где X_{ik}^j – значение i -й компоненты вектора признаков, полученного в j -й реализации обучающей выборки k -го класса.

Следует отметить, что названные правила не исчерпывают всего многообразия возможных способов вынесения решения. Выбор конкретного правила существенным образом зависит от технических возможностей проектируемой системы классификации.

Как правило, статистические характеристики признаков априори неизвестны, поэтому в алгоритмах (2.3.12) – (2.3.15) обычно используются оценки векторов средних значений и ковариационных матриц по обучающим выборкам для каждого из распознаваемых классов.

2.4. Адаптивный алгоритм классификации пространственно-распределённых целей по данным радиолокатора с синтезированной апертурой

Рассмотрим ситуацию, когда необходимо принимать решение о принадлежности объекта к одному из трех классов (большой, маленький, средний). В общем случае принципиально возможно разделение объектов на большее число классов. Однако, как методология построения алгоритмов классификации, так и их содержание при увеличении числа классов останутся качественно неизменными, если не считать естественных количественных отличий.

Решение задачи распознавания ПРЦ усложняется в связи с наличием амплитудных флуктуаций наблюдаемого радиолокационного портрета ПРЦ, зависимостью его параметров от условий наблюдения: ракурса, отношения сигнал/шум, состояния подстилающей поверхности, определяющей ее удельную ЭПР и уровень АРУ сигнала, а также угловых скоростей перемещения цели. Вращательное движение цели с априорно неизвестными скоростями вызывает сложные искажения его РЛИ, проявляющиеся в сжатии (растяжении) его изображения вдоль путевой дальности, в кажущемся изменении ракурса цели и взаимного расположения отдельных блестящих точек.

Указанные особенности задачи приводят к тому, что алгоритмы классификации должны базироваться на процедуре адаптивного обучения, в процессе которой

формируются эталоны классов объектов и зависимости их характеристик от различных параметров, прежде всего от ракурса.

Для получения и обоснования алгоритмов обработки радиолокационных изображений с целью выделения классификационных признаков и алгоритмов собственно классификации кораблей приведем краткий вывод оптимального алгоритма с тем, чтобы путем аргументированных его упрощений обосновать методологию получения рабочих алгоритмов для классификации.

Решение этой проблемы в общем виде произведем при следующих предположениях:

1. РСА перемещается по прямолинейной траектории, использует импульсный широкополосный зондирующий сигнал, причем отсчеты РЛИ различных каналов дальности могут считаться статистически независимыми. В связи с этим все дальнейшие рассуждения проводятся для одного канала дальности. Обобщение алгоритма на все РЛИ производится естественным образом на заключительном этапе вывода алгоритма классификации.

2. Весь участок поверхности, попадающий в один канал дальности, разбит на отдельные элементарные участки, состоящие, в свою очередь, из большого числа элементарных отражателей. Каждый элементарный участок определяется своей координатой d_i ($i = \overline{1, n}$; n – число таких участков) по отношению к центру всей наблюдаемой поверхности. Сигнал, отраженный от такого участка, представляет собой нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_m^2(d_i)$, которая зависит от целого ряда параметров, в первую очередь, от типа объекта и индивидуальных особенностей его архитектуры, дальности и ракурса его наблюдения и т.п. При обозначении мощности отраженного сигнала сохранен индекс " m ", характеризующий ее зависимость от номера класса объекта.

3. Сигналы, отраженные различными элементарными участками поверхности, созданы физически различными отражателями и поэтому с достаточным основанием могут считаться статистически независимыми.

4. В качестве достаточной статистики, являющейся методологической основой, как выбора признаков, так и алгоритма принятия решения, будет использовано отношение правдоподобия для гипотез о классе объектов.

С учетом принятых предположений комплексная амплитуда сигнала, принимаемого в n -й точке траектории от i -го элементарного участка поверхности цели

и/или близлежащей точки подстилающей поверхности с координатой x_i может быть записана в следующем виде:

$$U_l = \sum_{i=1}^N f_n^k(x_i) \exp(-j\varpi_0 \tau_n(x_i)) + N_n, \quad (2.4.1)$$

где ϖ_0 – несущая частота, $\tau_n(x_i)$ – запаздывание сигнала, принимаемого в n -й точке траектории от i -го элементарного участка наблюдаемой поверхности; $f_n^k(x_i)$ – комплексная амплитуда сигнала, формируемого i -м элементарным участком поверхности объекта k -го класса в n -й точке приема, N_n – комплексная амплитуда n -го отсчёта шума. Комплексная амплитуда представляет собой выборочное значение нормальной случайной величины, имеющей следующие статистические характеристики:

$$M\{f_n^k(x_i)\} = 0, \quad (2.4.2)$$

$$M\{f_n^k(x_i) f_n^k(x_j)\} = \sigma_k^2(x_i) \delta_{ij}, \quad (2.4.3)$$

где δ_{ij} – символ Кронеккера.

Обозначая расстояние до центра наблюдаемого участка поверхности R_H , запишем величину запаздывания отраженного сигнала от i -го элементарного участка до n -й точки траектории:

$$\tau_n(x_i) = \frac{2}{C} \sqrt{R_H^2 + (r_n - x_i)^2} \approx \frac{2R_H}{C} \left[1 + \frac{(r_n - x_i)^2}{2R_H^2} \right], \quad (2.4.4)$$

где C – скорость света, r_n – координата n -й точки приема отраженного сигнала.

Обобщая высказанные предположения, сформируем вектор наблюдаемых данных на выходе приемника локатора:

$$U = \beta f^k + N_{ш}, \quad (2.4.5)$$

где $\beta = (S(x_i), \dots, S(x_n))$ – матрица $(N_E * n)$, состоящая из векторов:

$$S(x_i) = \|S(x_i^n)\| = \left\| \exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda R_H} r_n^2 - j \frac{4\pi}{\lambda R_H} x_i r_n \right) \right\|, \quad (2.4.6)$$

задающих фазовое распределение сигнала, отраженного от i -го элемента поверхности, по точкам синтезируемой апертуры, имеющим координаты r_n ($n = \overline{1, N_E}$; N_E – число принимаемых импульсов); $f^k = \|f_i^k\| = \|f_n^k(x_i)\|$ – вектор комплексных амплитуд, размерность которого определяется числом отражающих элементарных участков

поверхности; $N_{ш}$ – вектор отсчетов шума, имеющего следующие статистические характеристики: $M\{N_{ш}\} = 0$ $0.5M\{N_{ш}N_{ш}^{*T}\} = R_{ш} = \sigma_{ш}^2 E$. где E – единичная матрица, а $\sigma_{ш}^2$ – дисперсия шума.

Для решения задачи классификации по какому-либо из статистических критериев: минимума среднего риска, максимума апостериорной плотности или максимального правдоподобия (этот критерий в дальнейшем будет принят в качестве основного) - необходимо записать отношение правдоподобия:

$$\Delta_k = \frac{p(U / \text{сигнал от цели } k\text{-го класса} + \text{шум})}{P(U / \text{шум})} \quad (2.4.7)$$

где $P[U/.]$ – условная плотность вероятности наблюдения вектора U при наличии поверхности k -го класса и шума или только шума. Считая вектор U гауссовским с нулевым математическим ожиданием, что соответствует предыдущим рассуждениям, запишем отношение правдоподобия:

$$\Lambda_k = \frac{1}{|E + \beta Q_k \beta^{*T}|} \exp(-0.5 U^{*T} [R_{ш}^{-1} - R_{ш\text{ш}k}^{-1}] U), \quad (2.4.8)$$

$$\text{где } R_{ш\text{ш}k} = \beta Q_k \beta^{*T} + R_{ш}, \quad (2.4.9)$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sigma_{1k}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{nk}^2 \end{pmatrix}$$

- матрица мощностей сигналов от каждого из n элементарных участков, входящих в анализируемую поверхность k -го класса.

Учитывая специальный вид матрицы (2.4.9) и используя равенство Вудбери, запишем логарифм отношения правдоподобия в следующем виде:

$$l_k = \ln \Lambda_k = 0.5 U^{*T} R_{ш}^{-1} \beta [E + Q_k \beta^{*T} R_{ш}^{-1} \beta]^{-1} Q_k \beta^{*T} R_{ш}^{-1} U - Sp \ln(E + \beta Q_k \beta^{*T}), \quad (2.4.10)$$

Здесь

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sigma_{1k}^2 / \sigma_{ш}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{nk}^2 / \sigma_{ш}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{nk} \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

- диагональная матрица отношений мощностей сигналов от каждого i -го элементарного участка к мощности шума в одном импульсе.

Вводя новый вектор

$$F = \|F_i\| = \frac{1}{\sigma_{ii}} \beta^{*T} R_{ii}^{-1} U = \left\| \frac{1}{\sigma_{ii}} \sum_{n=1}^{N_H} U_n \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda R_H} r_n^2 + j \frac{4\pi}{\lambda R_H} r_n x_i \right) \right\|, \quad (2.4.12)$$

компоненты которого представляют собой отсчеты комплексных амплитуд РЛИ, для достаточной статистики (логарифма отношения правдоподобия) получаем выражение:

$$l_k = \ln \Lambda_k = 0.5 F^{*T} (E + Q_k \beta^{*T} \beta)^{-1} Q_k F - Sp \ln (E + \beta Q_k \beta^{*T}). \quad (2.4.13)$$

Считая размер элементарного участка поверхности равным размеру элемента разрешения по азимуту и пренебрегая влиянием соседних участков ($\beta^{*T} \beta \approx N_H E$), получаем выражение достаточной статистики:

$$l_k = \sum_{i=1}^N \frac{q_{ik}}{1 + q_{ik}} \frac{|F_i|^2}{2} - \sum_{i=1}^N \ln(1 + q_{ik}), \quad (2.4.14)$$

где q_{ik} ($i=1, \dots, N; k=1, \dots, M$) – отношение сигнал/шум в i -м элементе разрешения после когерентного накопления N отсчетов, M – число классов.

При известных априори «радиолокационных портретах» (векторах q_{ik}) для каждого из классифицируемых типов поверхностей оптимальный алгоритм классификации состоит в том, чтобы вычислить достаточную статистику для каждого возможного m и выбрать максимальное значение.

$$\hat{k} = \arg \max_k \left\{ - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{1 + q_{ik}} \frac{|F_i|^2}{2} - \ln(1 + q_{ik}) \right] \right\}. \quad (2.4.15)$$

К сожалению, подробные «радиолокационные портреты» (РП), как правило, неизвестны практически ни для одной ПРЦ, что приводит к необходимости их оценки на этапе предварительного обучения. Соответственно алгоритм классификации имеет вид:

$$\hat{k} = \arg \min_k \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \hat{q}_{ik}} \frac{|F_i|^2}{2} - \hat{C}_k \right\}, \quad (2.4.16)$$

где знак «уголок над символом» обозначает оценку соответствующего параметра на этапе предварительного обучения.

Следует обратить особое внимание на тот факт, что достоверная оценка РП представляет собой очень сложную в организационном и вычислительном плане задачу, в первую очередь, из-за чрезвычайно большого объема факторов, влияющих на вид радиолокационного портрета. К таким факторам можно отнести зависимость РП от условий наблюдения (дальность, ракурс, длина волны, поляризация), погодных и климатических условий, времени суток и времени года, индивидуальных особенностей,

конфигурации и электродинамических свойств наблюдаемых объектов. В то же время, очевидно, что в любом случае основой для решения задачи классификации является вектор достаточных статистик

$$l = \|l_k\| = \left\| \sum_{i=1}^N \frac{|F_i|^2}{1 + \hat{q}_{ik}} \right\|, \quad (2.4.17)$$

Этот вектор является основой для принятия решения в решающем пространстве, так как константы \hat{C}_m не зависят от наблюдаемых данных. Использование этого вектора представляет основу для классификации ПРЦ. Его следует применять на практике во все более возрастающей степени по мере создания банка радиолокационных портретов, полученных в разных условиях наблюдения.

Поскольку на этапе эскизного проектирования говорить о наличии представительного банка РП безусловно преждевременно, для синтеза алгоритма классификации приходится использовать те исходные данные о различии объектов, которые не вызывают сомнений и имеют ясное физическое обоснование. Такими робастными признаками, как показано выше, являются размеры и общая ЭПР ПРЦ, в то время как индивидуальные (присущие конкретному кораблю) признаки, содержащиеся в РП ПРЦ, на этом этапе априори не известны. В тех случаях, когда какие-либо надежные сведения о распределении ЭПР по поверхности цели отсутствуют, целесообразно считать такое распределение равномерным с тем, чтобы ориентироваться на худшую ситуацию, ибо наличие индивидуальных особенностей, отличающих один класс от другого, не может, по крайней мере, потенциально ухудшить эффективность распознавания.

В этом случае при формировании весовых коэффициентов β_{mi} не используется информация о «тонкой» структуре РП, но учитываются априорные сведения об отличии классов объектов по размерам и ориентации областей, занимаемых «портретами» ПРЦ на РЛИ. Названные области, в свою очередь, существенно зависят от условий наблюдения, в частности, оценок наклонной дальности и ракурса.

В этом случае компоненты вектора α вычисляются путем суммирования отсчетов РЛИ в пределах области, зависящей, как от номера конкурирующей гипотезы, так и от ракурса наблюдения ПРЦ:

$$l_k = \sum_{\Omega_k(\varphi)} |F_i|^2 \quad (2.4.18)$$

Более подробно алгоритм выглядит следующим образом.

По наблюдаемому РЛИ, предъявленному к классификации, прежде всего, производятся две операции:

- оценка области, занятой элементами цели на изображении, например, путем сравнения отсчетов с порогом, установленным по уровню шума;
- оценка ракурса $\hat{\varphi}$, использующая только те отсчеты РЛИ, которые отнесены к ПРЦ по результатам предыдущей пороговой обработки.

Поскольку размерность вектора равна числу конкурирующих гипотез, при обучении необходимо моделировать T выборочных векторов l_t ($t = \overline{1, T}$) при задании объектов каждого из M классов, расположенных под ракурсом, величина которого оценивается по наблюдаемому РЛИ

$$l_t^{k_0} = \|l_{tk}^{k_0}\| = \left\| \sum_{\Omega_k(\varphi)} |F_i|_{tk_0}^2 \right\|, \quad (2.4.19)$$

где $|F_i|_{tk_0}^2$ – i -й отсчет t -й обучающей выборки при условии, что объект относится к классу k_0 . Следует обратить внимание на отличие индексов k и k_0 . Первый из них – координата вектора, а второй – номер объекта, для которой производится моделирование выборочных отсчетов РЛИ $|F_i|_{tk_0}^2$ на этом этапе обучения.

В результате обучения формируются оценки векторов выборочных средних:

$$l^{k_0} = \|l_k^{k_0}\| = \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_{tk}^{k_0} \right\| \quad (2.4.20)$$

и выборочных дисперсий:

$$(\sigma^{k_0})^2 = \|(\sigma_k^{k_0})^2\| = \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (l_{tk}^{k_0} - l_k^{k_0})^2 \right\|. \quad (2.4.21)$$

Принятие решения производится по минимуму расстояния:

$$\hat{k}_0 = \arg \min_{k_0} \sqrt{\sum_{m=1}^M \frac{(l_k - l_k^{k_0})^2}{(\sigma_k^{k_0})^2}}. \quad (2.4.22)$$

Анализ алгоритмов распознавания ПРЦ, различающихся удельной ЭПР или размерами, приведен методом статистического моделирования в главе 3.

Принятая методология опирается на понятие достаточной статистики, поскольку вектор достаточных статистик является оптимальным набором признаков, позволяющим решить задачу классификации наилучшим образом в рамках критерия минимума среднего риска. В то же время формирование названного вектора наталкивается на практически

непреодолимые трудности из-за очень большой априорной неопределённости. В связи с этим целесообразно искать признаки классификации, начиная с вектора достаточных статистик путём его последовательного упрощения путём отказа от тех деталей и тонких особенностей, которые недоступны классификатору в условиях реальной работы.

Отражающие свойства цели моделируются комплексной функцией отражения, имеющей две составляющих. Одна из них описывает диффузионное отражение радиосигналов от поверхности ПРЦ и является непрерывной функцией координат поверхности цели, а вторая составляющая вызвана наличием в конструкции цели центров интенсивного отражения электромагнитных волн, которая хорошо аппроксимируется совокупностью «блестящих» точек. Диффузионная составляющая предполагается гауссовской с нулевым математическим ожиданием. Значения функций отражения от «блестящих» точек также считаются гауссовскими и независимыми между собой.

Основные результаты раздела заключаются в следующем.

Для заданной модели отражающих свойств ПРЦ на основе байесовского подхода решена задача многоальтернативной проверки гипотез применительно к наблюдению пространственно-распределённых целей системой космических РЛС. При этом предполагалось, что приём осуществляется на фоне аддитивного гауссовского шума и закон движения наблюдаемой цели известен. Получено выражение для элементов вектора достаточных статистик, представляющих собой логарифмы отношений правдоподобия для всех возможных классов целей. Предложена структурная схема устройства, обеспечивающего формирование достаточных статистик.

Показано, что формирование вектора признаков должно осуществляться в два этапа:

1. По данным каждой РЛС, входящей в систему, методом искусственного синтеза апертуры формируется радиолокационное изображение наблюдаемой цели.

2. Вектор полученных РЛИ обрабатывается таким образом, чтобы сформировать вектор достаточных статистик. Формирование достаточной статистики осуществляется с помощью двухканального устройства. В одном канале формируется логарифм отношения правдоподобия для диффузионной составляющей сигнала, отражённого k -й целью, на фоне шума. Второй канал вычисляет логарифм отношения правдоподобия для сигнала, отражённого «блестящими» точками k -й цели, на фоне шума и диффузной отражающей сигнала.

Литература к главе 2

1. Радиолокационные станции обзора Земли / под ред. Г.С. Кондратенкова. М.: Радио и связь, 1983. 271с.
2. Доросинский Л.Г. Классификация радиолокационных изображений / Л.Г.Доросинский // Межд. конф. Теория и техника передачи, приема и обработки информации. /ХТУРЭ. Туапсе 1995. с. 104.
3. Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенны / под ред. В.Т.Горяинова. М.: Радио и связь, 1988. 304с.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: в 3т. / Г. Ван Трис. М.: Сов. радио, 1972. т.1. 744с.
5. Барабаш Ю.Л. Коллективные статистические решения при распознавании / Ю.Л. Барабаш. М.: Радио и связь, 1983. 224с.
6. Растринин Л.А. Метод коллективного распознавания / Л.А. Растринин, Р.Х. Эринштейн. М.: Энергоиздат, 1981. 80с.
7. Ху М.К. Оpozнание фигур при помощи инвариантных соотношений между моментами / М.К. Ху. ТИИЭР. 1961. N 9. с.95-98.
8. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт; пер с англ. В.Л. Стефанюка. М.: Мир, 1976. 511с.

3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ЦЕЛЕЙ ПО ДАННЫМ РЛС БО

В данной главе предлагаются методы определения эффективности алгоритмов классификации ПРЦ, основанные на определении вероятностей правильного и ошибочного распознавания классов ПРЦ с помощью аналитических выражений и/или статистического моделирования, которые имеют, как самостоятельное значение при проектировании системы распознавания, так и позволяют аргументировать выбор наиболее важных тактических и технических параметров РСА, например, энергетического потенциала и разрешающей способности, с позиций обеспечения требуемого качества устройства в целом. Проблема анализа эффективности классификации включает решение трех основных задач, а именно:

1. Разработка методики расчета потенциальной точности классификации - получение расчетных выражений для определения вероятностей ошибочных и правильных решений при использовании вектора наблюдаемых данных. Такая методика позволяет оценить предельные характеристики качества, на которые можно рассчитывать, исходя из различий в отраженных сигналах от ПРЦ различных классов (разделы 3.1 и 3.2).

2. Разработка методики расчета вероятностей ошибочных и правильных решений по радиолокационным изображениям ПРЦ, полученным в результате первичной обработки в РСА – на выходе детектора (разделы 3.3 и 3.4).

3. Статистическое моделирование процедуры классификации при использовании квазиоптимальных и эмпирических признаков (разделы 3.5 и 3.6).

3.1. Методика использования граничных соотношений Чернова и Кайлата для оценки эффективности классификации ПРЦ по вектору наблюдаемых данных

Потенциальные возможности решения задачи многоальтернативной проверки гипотез (а именно в таком виде формализуется задача распознавания ПРЦ) в подавляющем большинстве практических случаев характеризуются вероятностями вынесения правильных ($P_{пр}$) и ошибочных ($P_{ош}$) решений. Точный аналитический расчет этих вероятностей может быть выполнен лишь в простейших частных случаях. В большинстве реальных радиолокационных ситуаций практически единственным методом оценки эффективности распознавания является метод статистического моделирования (математического, натурного и т. п.). Однако, на этапе эскизного проектирования, предварительной оценки, прогноза эффективности, когда необходимо оценить принципиальную возможность функционирования проектируемых алгоритмов и

произвести выбор основных параметров РЛС, использование даже гибкого математического моделирования приводит к недопустимым затратам машинного времени в связи с чрезвычайно большим количеством анализируемых (перебираемых) параметров. В этих условиях для получения количественных оценок вероятностных характеристик работы системы наиболее целесообразным следует признать использование граничных соотношений Чернова и Кайлата [1,2,7], которые были введены для случая проверки двух гипотез и в данной работе распространены на произвольное их количество.

При проверке $(M+1)$ гипотез вероятность вынесения ошибочного решения равна:

$$P_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^{M+1} p_i \sum_{j \neq 1} p(j/i) \quad (3.1.1)$$

где p_i - априорная вероятность i -й гипотезы,

$p(j/i)$ -вероятность вынесения решения в пользу j -й гипотезы в том случае, когда истинной является 1-я гипотеза.

Это выражение можно представить в виде:

$$P_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^{M+1} [p_i p(j/i) + p_j p(i/j)] \quad (3.1.2)$$

В дальнейшем предполагаем, что решение в пользу того или иного класса принимается с использованием критерия минимума полной вероятности ошибки.

Используя методику [1], можно найти верхнюю границу ошибки (3.1.2) при проверке многих гипотез:

$$P_{\text{ош}} \leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^{M+1} [p_i Ch_{ij}^F + p_j Ch_{ij}^M] \quad (3.1.3)$$

В последнем выражении Ch_{ij}^F и Ch_{ij}^M - границы Чернова для вероятностей ложной тревоги и пропуска цели при проверке пары гипотез i и j независимо от остальных гипотез.

Необходимо отметить, что оценка ошибки, даваемая неравенством (3.1.3), может быть существенно завышена, причем точность оценки в общем случае уменьшается по мере увеличения числа конкурирующих гипотез.

В этих условиях представляется безусловно целесообразным нахождение и нижней границы вероятности ошибки правильной классификации (3.1.1). Для бинарного обнаружения такая граница введена Кайлатом [3]. В данной работе произведено обобщение названной границы на случай произвольного числа гипотез.

Для отыскания нижней границы вероятности ошибки воспользуемся выражением (3.1.1). Сумма по j в его правой части представляет собой вероятность вынесения

ошибочного решения при наблюдении цели i -го класса. Такая ошибка возникает, если хотя бы для одной из альтернативных гипотез выполняется неравенство:

$$l_{ij} > l_{ii} \quad (i \neq j), \quad (3.1.4)$$

в котором
$$l_{ij} = \ln \left(\frac{W_j(U)}{W_i(U)} \right) \quad (3.1.5)$$

- логарифм отношения правдоподобия при проверке пары гипотез с номерами j и i ; $W_j(U)$ и $W_i(U)$ - плотности распределения вероятностей значений вектора наблюдаемых данных U по гипотезам j и i . Пусть событие A_j соответствует выполнению условия (3.1.4). Тогда вероятность ошибки при наблюдении i -го класса целей представляется как вероятность суммы событий:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} P(j/i) = P \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} A_j \right]. \quad (3.1.6)$$

Используя формулу для определения вероятности суммы зависимых событий [4], можно убедиться в справедливости неравенства:

$$P \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} A_j \right] \geq \max_{\substack{j \\ j \neq i}} P[A_j]. \quad (3.1.7)$$

В этом выражении $P[A_j]$ представляет собой вероятность вынесения решения в пользу j -го класса целей при условии, что истинной является цель i -го класса при проверке только этой пары альтернатив. Обозначая эту вероятность $P_2(j/i)$ и используя (3.1.7), для вероятности ошибки (3.1.1) запишем неравенство:

$$P_{\text{ош}} \geq \sum_{i=1}^{M+1} P_i P_2(j/i). \quad (3.1.8)$$

где на значение j наложено единственное ограничение:

$$j \neq i. \quad (3.1.9)$$

Неравенство (3.1.8) позволяет оценить нижнюю границу вероятности ошибки в случае проверки более двух гипотез. Поскольку нас, в первую очередь, интересует случай распознавания трех классов, сосредоточим внимание именно на этой задаче (обобщение на произвольное число классов производится аналогично).

Используя (3.1.8) и (3.1.9), запишем два очевидных неравенства:

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &\geq P_1 P(2/1) + P_2 P_2(3/2) + P_3 P_2(1/3), \\ P_{\text{ош}} &\geq P_1 P(3/1) + P_2 P_2(1/2) + P_3 P_2(2/3). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Суммируя правые и левые части этих неравенств, получим:

$$P_{\text{ош}} \geq 0.5 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 [P_i P_2(j/i) + P_j P_2(i/j)]. \quad (3.1.11)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках (3.1.11), представляет собой вероятность ошибки при решении задачи проверки двух гипотез - i -й и j -й. Для оценки этой ошибки воспользуемся методикой, предложенной в [1]. При этом необходимо помнить, что в нашей постановке гипотезы с номерами i и j не образуют полной группы событий, то есть

$$P_i + P_j \neq 1. \quad (3.1.12)$$

Используя критерий минимума ошибки, искомую вероятность графически можно представить в виде суммы заштрихованных на рис.3.1 площадей C и D (на этом рисунке изображены апостериорные плотности вероятностей для двух рассматриваемых гипотез). В соответствии с рисунком можно записать два равенства:

$$\begin{aligned} \int P_i W_i(U) dU &= P_i = A + C + D, \\ \int P_j W_j(U) dU &= P_j = B + C + D. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

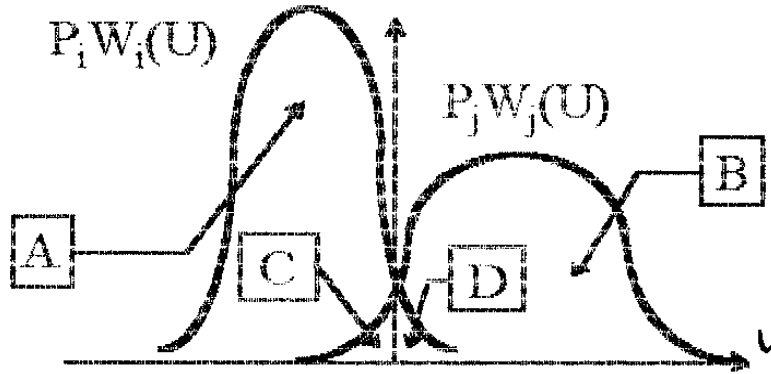


Рис. 3.1. К вопросу о нижней границе вероятности ошибки

Суммируя их, получим:

$$A + B + 2(C + D) = P_i + P_j \quad (3.1.14)$$

Нетрудно заметить, что:

$$A + B = \int |P_i W_i(U) - P_j W_j(U)| dU \quad (3.1.15)$$

Следовательно, искомая вероятность ошибки равна:

$$C + D = 0.5 \{P_i + P_j - \int |P_i W_i(U) - P_j W_j(U)| dU\}. \quad (3.1.16)$$

Для оценки интеграла (3.1.15) применим неравенство Шварца [4]:

$$\left[\int |P_i W_i(U) - P_j W_j(U)| dU \right]^2 \leq \left\{ \int \left| [P_i W_i(U)]^{\frac{1}{2}} - [P_j W_j(U)]^{\frac{1}{2}} \right|^2 dU \right\} *$$

$$\left\{ \int \left| [P_i W_i(U)]^{1/2} + [P_j W_j(U)]^{1/2} \right|^2 dU \right\}. \quad (3.1.17)$$

После преобразования правой части (3.1.17) получим:

$$(A + B)^2 \leq (P_i + P_j)^2 - 4 \left\{ (P_i P_j)^{1/2} \int [W_i(U) W_j(U)]^{1/2} dU \right\}^2 \quad (3.1.18)$$

Следовательно

$$P_i P_2(j/i) + P_j P_2(i/j) = C + D \geq Kl_{ij}, \quad (3.1.19)$$

$$\text{где } Kl_{ij} = 0.5 \left\{ P_i + P_j - \sqrt{(P_i + P_j)^2 - 4 \left[(P_i P_j)^{1/2} \int [W_i(U) W_j(U)]^{1/2} dU \right]^2} \right\} \quad (3.1.20)$$

Это выражение можно представить в виде:

$$Kl_{ij} = 0.5 \left\{ P_i + P_j - \sqrt{(P_i + P_j)^2 - 4 \{ (P_i P_j)^{1/2} \exp [\mu_{ij}(0.5)] \}^2} \right\}, \quad (3.1.21)$$

$$\text{где } \mu_{ij}(s) = \ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} [W_j(U)]^s [W_i(U)]^{1-s} dU \right). \quad (3.1.22)$$

Выражение (3.1.21) представляет собой обобщение границ Кайлата для двух гипотез i и j , не образующих полной группы событий.

Окончательно (3.1.11) запишем в виде

$$P_{\text{ош}} \geq 0.5 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 Kl_{ij}. \quad (3.1.23)$$

По аналогии с (3.1.10) и (3.1.11) можно найти нижнюю границу вероятности ошибки для любого числа конкурирующих гипотез. В общем случае проверки $M+1$ гипотез имеем:

$$P_{\text{ош}} \geq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^{M+1} Kl_{ij}. \quad (3.1.24)$$

Приведенные выше выкладки получены для случая, когда наблюдаемые данные представляют собой скалярную величину. Однако, все результаты справедливы, если наблюдаемые данные имеют векторный характер. Изменения при этом затрагивают только выражение (3.1.22) для логарифма производящей функции моментов, которое принимает следующий вид:

$$\mu_{ij}(s) = \ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} [W_j(U)]^s [W_i(U)]^{1-s} dU \right). \quad (3.1.25)$$

Для расчета границ Чернова Ch_{ij}^F и Ch_{ij}^M воспользуемся методикой, описанной в [5] и основанной на разложении в ряд Эджворта плотности вероятности, которая предполагается близкой к гауссовской. Ограничиваясь двумя первыми членами разложения, имеем:

$$Ch_{ij}^F = Ch_{ij}^{F1} - Ch_{ij}^{F2} \frac{\gamma_3}{6}, \quad (3.1.26)$$

$$Ch_{ij}^M = Ch_{ij}^{M1} - Ch_{ij}^{M2} \frac{\gamma_3}{6}, \quad (3.1.27)$$

где $Ch_{ij}^{F1} = \exp[\mu_{ij}(s) - s\dot{\mu}_{ij}(s)] I_0[s\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}], \quad (3.1.28)$

$$Ch_{ij}^{M1} = \exp[\mu_{ij}(s) - (1-s)\dot{\mu}_{ij}(s)] I_0[(1-s)\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}], \quad (3.1.29)$$

$$Ch_{ij}^{F2} = \exp[\mu_{ij}(s) - s\dot{\mu}_{ij}(s)] \left\{ [s\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}]^3 I_0[s\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}] + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} [1 - s^2\mu_{ij}(s)] \right\}, \quad (3.1.30)$$

$$Ch_{ij}^{M2} = \exp[\mu_{ij}(s) + (1-s)\dot{\mu}_{ij}(s)] \left\{ [(1-s)^2\ddot{\mu}_{ij}(s) - 1] \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} - [(1-s)\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}]^3 I_0[(1-s)\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}] \right\}, \quad (3.1.31)$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_{ij}^{(3)}(s)}{[\sqrt{\ddot{\mu}_{ij}(s)}]^3}, \quad (3.1.32)$$

$$I(\alpha) = \exp(\alpha^2/2) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (3.1.33)$$

Значение аргумента s в (3.1.29) – (3.1.32) находится путем решения уравнения

$$\dot{\mu}_{ij}(s) = \ln \frac{p_i}{p_j}. \quad (3.1.34)$$

Как следует из выражений (3.1.21), (3.1.29) - (3.1.32), для определения верхней и нижней границ вероятности вынесения ошибочного решения (3.1.1) требуется знать функцию $\mu_{ij}(s)$ и ее три первые производные для всех возможных пар распознаваемых классов целей.

Для расчета необходимых выражений воспользуемся (3.1.25), предполагая, что вектор наблюдаемых данных U представляет собой совокупность комплексных гауссовских отсчетов с нулевыми средними значениями. При этом для $\mu_{ij}(s)$ может быть получено следующее выражение:

$$\mu_{ij}(s) = (s-1)\ln[|R_i|] + s\ln[|R_j|] - \ln\{|[sR_j^{-1} - (1-s)R_i^{-1}]\}|. \quad (3.1.35)$$

где R_i и R_j - корреляционные матрицы вектора Y по гипотезам i и j соответственно. Для вычисления значений правой части выражения (3.1.35) обычно используют теорему Кейли-Гамильтона [6]. Однако, ее непосредственное применение к (3.1.35) требует нахождения собственных значений трех различных матриц для каждой пары гипотез. Процедура поиска собственных значений является достаточно трудоемкой. Для ее упрощения целесообразно разложить эрмитову матрицу R_j на множители по Холецкому:

$$R_j = L_j L_j^*. \quad (3.1.36)$$

где L_j - нижняя (левая) треугольная матрица, а символ $*$ обозначает эрмитово сопряжение.

При этом выражение (3.1.35) может быть представлено в виде:

$$\mu_{ij}(s) = \sum_k [s \ln \lambda_k^{ij} - \ln(s \lambda_k^{ij} + 1 - s)], \quad (3.1.37)$$

где λ_k^{ij} - k -ое собственное значение матрицы:

$$K_{ij} = L_j^{-1} R_i (L_j^*)^{-1}. \quad (3.1.38)$$

Искомые производные функции $\mu_{ij}(s)$ имеют вид:

$$\mu_{ij}(s) = \sum_k \left[\ln \lambda_k^{ij} - \frac{\lambda_k^{ij} - 1}{s \lambda_k^{ij} + 1 - s} \right], \quad (3.1.39)$$

$$\dot{\mu}_{ij}(s) = \sum_k \left[\frac{\lambda_k^{ij} - 1}{s \lambda_k^{ij} + 1 - s} \right]^2, \quad (3.1.40)$$

$$\ddot{\mu}_{ij}(s) = -2 \sum_k \left[\frac{\lambda_k^{ij} - 1}{s \lambda_k^{ij} + 1 - s} \right]^3, \quad (3.1.41)$$

Из приведенных соотношений следует, что в рассматриваемой постановке граничные значения вероятности ошибки при многоальтернативной проверке гипотез полностью определяются корреляционными матрицами отсчетов вектора наблюдаемых данных по каждому из возможных классов.

Определим вид этих матриц, считая, что входящие в систему РЛС независимы между собой. Последнее предположение позволяет ограничиться рассмотрением корреляционной матрицы отсчетов РЛИ, получаемого в отдельной p -й РЛС системы при наблюдении k -й цели.

Таким образом, РЛИ цели можно представить в виде суммы трех составляющих: шумовой

$$F_{pN}(\bar{p}/\bar{x}^0, \bar{x}) = \int E_p^*(\bar{p}, t/\bar{x}^0, \bar{x}) S_p^*(\bar{p}, t/\bar{x}^0, \bar{x}) G_p(\bar{p}, t/\bar{x}^0, \bar{x}) N_p(t) dt, \quad (3.1.42)$$

диффузионной

$$F_{pk}^0(\bar{p}/\bar{x}^0, x) = U_{kp} \int \varphi_p(\bar{p}, \bar{x}) f_{k0}^p(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.1.43)$$

и составляющей, вызванной наличием "блестящих точек" в составе модели ПРЦ k -го класса:

$$F_{pk}^1(\bar{p}/\bar{x}^0, \bar{x}) = U_{kp} \sum_i \varphi_p(\bar{p}, \bar{p}_{ki}^p) f_{ki}^p \quad (3.1.44)$$

Эти составляющие независимы между собой, и, следовательно, элементы искомой корреляционной матрицы представимы в виде суммы:

$$\|R_{pk}\|_{lm} = \|R_{pN}\|_{lm} + \|R_{pk}^0\|_{lm} + \|R_{pk}^1\|_{lm}, \quad (3.1.45)$$

где

$$\|R_{pN}\|_{lm} = N_{p0} \varphi_p^0(\bar{p}_l, \bar{p}_m) \quad (3.1.46)$$

$$\|R_{pk}^0\|_{lm} = U_{kp}^2 \int [\sigma_{ko}^p(\bar{x})]^2 \varphi_p(\bar{p}_l, \bar{x}) \varphi_p^*(\bar{p}_m, \bar{x}) d\bar{x} \quad (3.1.47)$$

$$\|R_{pk}^1\|_{lm} = U^2 \sum \varphi_p(\bar{p}_l, \bar{p}_{ki}^p) \varphi_p(\bar{p}_m, \bar{p}_{ki}^p) [\sigma_{ki}^p]^2 \quad (3.1.48)$$

Дискретные значения \bar{p}_l и \bar{p}_m задают координаты отсчетов РЛИ на плоскости изображения.

Функции неопределенности траекторного сигнала φ_p^0 и φ_p определяются в соответствии с (3.3.19).

Вводя нормированные функции неопределенности φ_{pH}^0 и φ_{pH} пренебрегая константами, не влияющими на вычисление функции $\mu_{ij}(s)$ и ее производных, выражение (3.1.45) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|R_{pk}\|_{lm} = & q_{kp}(2N_{иР} + 1) \int [\sigma_{ko}^p(\bar{x})]^2 \varphi_{pH}(\bar{p}_l, \bar{x}) \varphi_{pH}(\bar{p}_m, \bar{x}) d\bar{x} + \\ & + q_{kp}(2N_{иР} + 1) \sum_i [\sigma_{ki}^p] \varphi_{pH}^2(\bar{p}_l, \bar{p}_{ki}^p) \varphi_{pH}^*(\bar{p}_m, \bar{p}_{ki}^p) + \varphi_{pH}^0(p_l, p_m) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

где
$$q_{kp} = \frac{2P_{p0}\lambda_p^2 G_{1p} G_{2p} (\sigma_{k\epsilon}^p)^2 \tau_p}{(4\pi)^3 N_{p0} R_{1p}^2 R_{2p}^2} \quad (3.1.50)$$

представляет собой эквивалентное отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума в импульсе для случая наблюдения точечного отражателя с ЭПР, равной суммарной ЭПР цели $(\sigma_{k\epsilon}^p)^2$, при расположении его в точке, соответствующей центру цели. Выражение

$$q_{k\epsilon}^p = q_{kp}(2N_{и} + 1) \quad (3.1.51)$$

следует рассматривать как суммарное отношение сигнал/шум по пачке из $(2N_{и}+1)$ импульсов

3.2. Анализ потенциальных характеристик классификации ПРЦ по вектору наблюдаемых данных

Анализ потенциальных характеристик классификации выполнен на конкретном и наиболее важном в практических приложениях примере распознавания трех классов ПРЦ, которые отличаются друг от друга размерами и суммарной ЭПР. Предположение об отсутствии "блестящих точек" оправдано стремлением получить достаточно общие характеристики, не связанные с индивидуальными особенностями радиолокационных портретов целей, тем более, что учет таких особенностей может привести к неоправданно завышенным оценкам качества классификатора. Далее считаем, что суммарная ЭПР каждой цели равномерно распределена по поверхности цели, которая представляет собой прямоугольник. В качестве эталонов для каждого класса используются их "средние" представители: цель N1 («большая цель») размером 360*30м, цель N2 («средняя цель») -

240*20м и цель N3 («малая цель») - 120*10м. Ракурс наблюдения для всех ПРЦ считается одинаковым и равным 90°. Будем считать, мощности сигналов, отраженных от целей разных классов при наблюдении под одинаковыми ракурсами, отличаются ориентировочно на 3 дБ. Предположим, что разрешающая способность РСА по азимуту и дальности одинакова, т.е.

$$Dx = Dy \quad (3.2.1)$$

При этом условии обеспечивается равенство масштабов формируемого РЛИ.

На рис. 3.2 приведены зависимости верхней

$$P_{\text{ПР}} = 1 - 0.5 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 Kl_{ij} \quad (3.2.2)$$

и нижней

$$P_{\text{ПР}} = 1 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 (P_i Ch_{ij}^p + P_j Ch_{ij}^M) \quad (3.2.3)$$

границ вероятности правильного распознавания от суммарного отношения сигнал/шум для цели N2 ($q_{2\varepsilon}$) при различных значениях разрешения. Отношения сигнал/шум для двух других целей отличаются на 3 дБ:

$$q_{1\varepsilon} = q_{2\varepsilon} + 3\text{дБ}, \quad q_{3\varepsilon} = q_{2\varepsilon} - 3\text{дБ} \quad (3.2.4)$$

Из анализа графиков следует, что для надежного распознавания целей с вероятностью не хуже 0.9 необходимо обеспечить отношение сигнал/шум $q_{2\varepsilon}$ не менее 15дБ. Кроме того, эффективность классификации существенно зависит от разрешающей способности РСА. Анализ влияния разрешения на качество распознавания (рис.3.3), выполненный при фиксированной общей энергии пачки импульсов, позволяет сделать следующие выводы:

- рассматриваемые кривые имеют максимум, который по мере увеличения отношения сигнал/шум смещается в область более высокого разрешения;
- минимальное значение $q_{2\varepsilon}$, при котором обеспечивается вероятность правильного распознавания не менее 0.9, составляет 14дБ. В этом случае необходимо выбирать разрешение в диапазоне 15-35 метров;
- следует заметить, что по мере увеличения отношения сигнал/шум требования к разрешающей способности достаточно быстро снижаются. Так, уже при $q_{2\varepsilon} = 16\text{дБ}$ диапазон возможных значений требуемого разрешения занимает интервал от 6 до 93 м.

В случае фиксированного отношения сигнал/шум в каждом импульсе (без ограничений общей энергетики пачки) вероятность правильной классификации так же

существенно зависит от разрешающей способности (рис.3.4). Однако, названная зависимость является монотонной – по мере улучшения разрешения вероятность правильного распознавания возрастает. Отсутствие экстремума связано с тем, что в этом случае улучшение разрешения связано с увеличением числа когерентно суммируемых импульсов и, следовательно, сопровождается увеличением интегрального отношения сигнал /шум. Практически неограниченное повышение разрешающей способности невозможно вследствие многих причин, приводящих к фазовым флуктуациям отраженного сигнала, среди которых, в частности, и собственное движение ПРЦ.

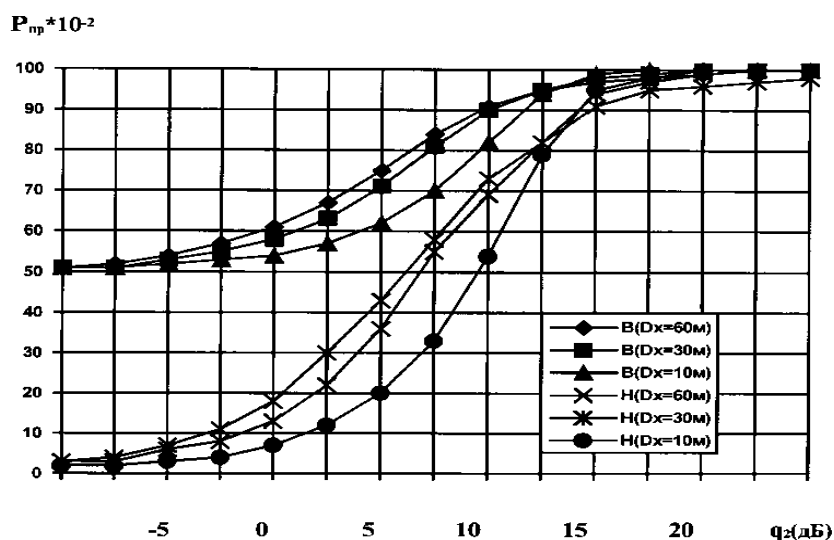


Рис. 3.2. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от суммарного отношения сигнал/шум (для цели 2-го класса; цели 1-го и 3-го классов отличаются на ± 3 дБ)

Влияние различий в ЭПР и размерах ПРЦ на эффективность их классификации иллюстрируется на рис.3.5 - 3.9. Зависимости вероятности $P_{пр}$ от разрешения при распознавании ПРЦ трех классов, не отличающихся размерами (240*20м), но отличающихся по ЭПР на 3 дБ, приведены на рис.3.5. Сравнение этих графиков с рис. 3.2 показывает, что при распознавании целей совпадающих размеров существенно повышаются требования к разрешению и отношению сигнал/шум.

Суммарные ЭПР выбраны одинаковыми $q_{1\varepsilon} = q_{2\varepsilon} = q_{3\varepsilon} = q_{\varepsilon}$. Из анализа приведенных рисунков следует, что при разрешении 30м и $q_{\varepsilon} = 15$ дБ цели классифицируются с вероятностью не ниже 0.9 при отличии линейных размеров на 45% и более. Повышение q_{ε} до 20дБ позволяет уменьшить различие в размерах до 25%. По мере улучшения разрешения вероятность правильного распознавания возрастает. Отсутствие экстремума связано с тем, что в этом случае улучшение разрешения связано с увеличением числа когерентно суммируемых импульсов и, следовательно,

сопровождается увеличением интегрального отношения сигнал /шум. Практически неограниченное повышение разрешающей способности невозможно вследствие многих причин, приводящих к фазовым флуктуациям отраженного сигнала, среди которых, в частности, и собственное движение ПРЦ.

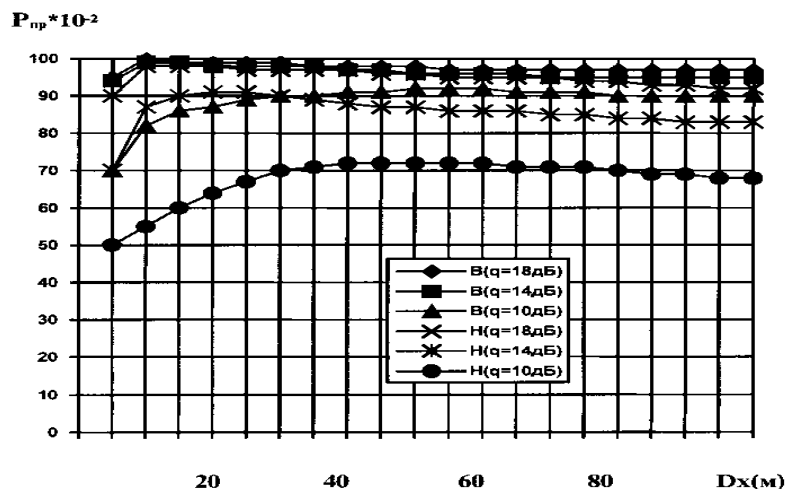


Рис. 3.3. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от разрешающей способности (при фиксированном суммарном отношении сигнал/шум)

На рис. 3.6 и рис.3.7 приведены зависимости вероятности правильного распознавания от разницы в линейных размерах ПРЦ, выраженной в долях по отношению к размеру цели 2-го класса (Δ) при разрешении 30 и 10м. Размеры (L -длина, S -ширина) целей определяются равенствами:

$$\begin{aligned} L_1 &= 240 * (1 + 0.01\Delta) & S_1 &= 20 * (1 + 0.01\Delta) \\ L_2 &= 240 & S_2 &= 20 \\ L_3 &= 240 * (1 - 0.01\Delta) & S_3 &= 20 * (1 - 0.01\Delta) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

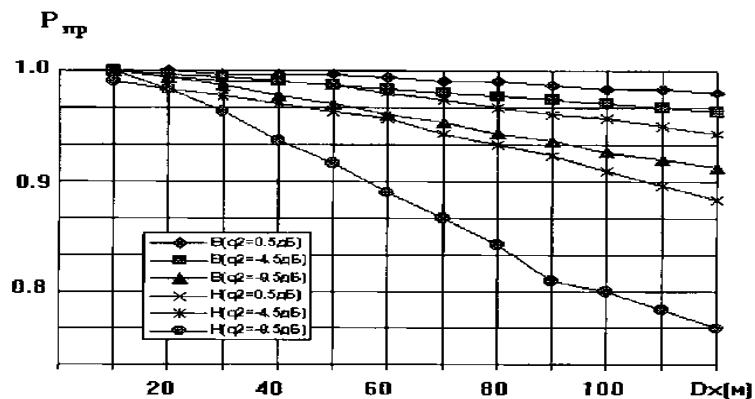


Рис 3.4. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от разрешающей способности (при фиксированном отношении сигнал/шум в импульсе)

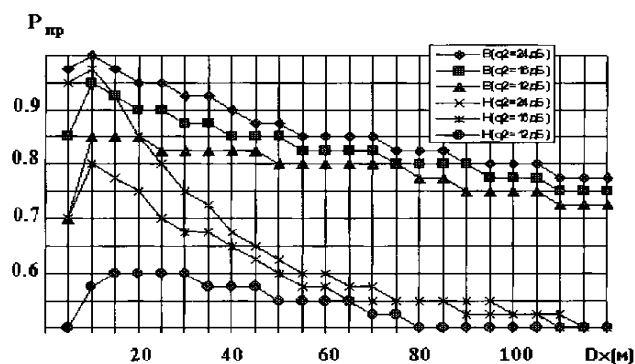


Рис 3.5. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от разрешающей способности (при фиксированном суммарном отношении сигнал/шум)

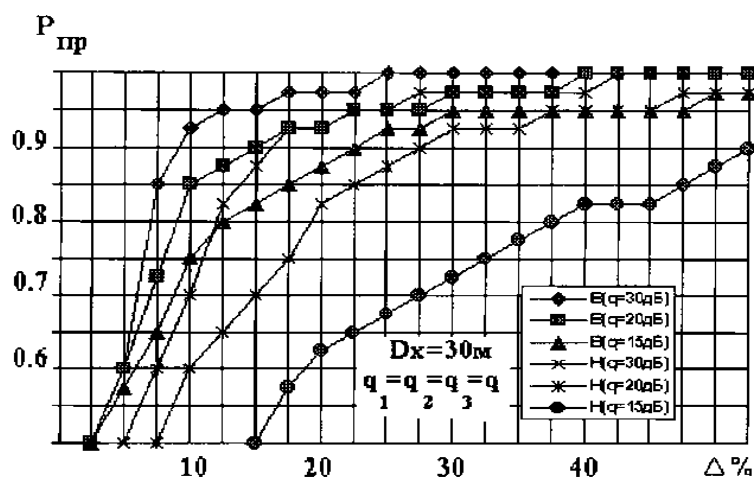


Рис. 3.6. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от различий в размерах целей (при фиксированном значении суммарного отношения сигнал/шум).

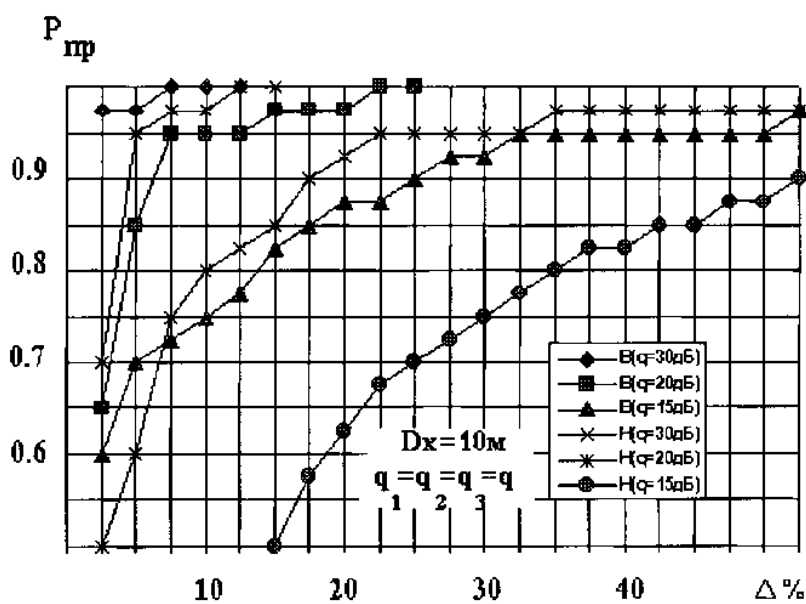


Рис. 3.7. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от различий в размерах целей (при фиксированном значении суммарного отношения сигнал/шум)

Рассмотрим влияние различия в ЭПР между целями на эффективность классификации. Полагаем, что суммарные отношения сигнал/шум для целей 1-го и 3-го классов составляют:

$$q_{1\varepsilon} = q_{2\varepsilon} + \Delta q, \quad q_{3\varepsilon} = q_{2\varepsilon} - \Delta q, \quad (3.2.6)$$

где Δq - разница между ЭПР целей разных классов. На рис. 3.8 приведены графики зависимости $P_{\text{пр}}(\Delta q)$ при классификации целей, не отличающихся размерами (240*20м), при разных значениях q_2 . На рис. 3.9 показаны аналогичные графики при классификации целей, отличающихся и размерами (360x30, 240x20, 120x10). Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- для распознавания целей с вероятностью $P_{\text{пр}} > 0.9$ при $q_{2\varepsilon} = 20\text{дБ}$ цели должны отличаться по ЭПР на 5дБ;
- увеличение $q_{2\varepsilon}$ до 30дБ сопровождается несущественным повышением качества (требуемое отличие в ЭПР снижается на 0.5-1.5дБ);
- при фиксированном отношении сигнал/шум и распознавании целей стандартных размеров зависимости $P_{\text{пр}}(\Delta q)$ имеют минимум в области малых значений разницы в ЭПР целей;
- при $q_{2\varepsilon} = 18\text{дБ}$ и более этот провал располагается в области отрицательных значений Δq и имеет незначительную глубину (около 3%); по мере уменьшения суммарного отношения сигнал/шум этот провал смещается в область положительных значений Δq и глубина его возрастает до десятков процентов.

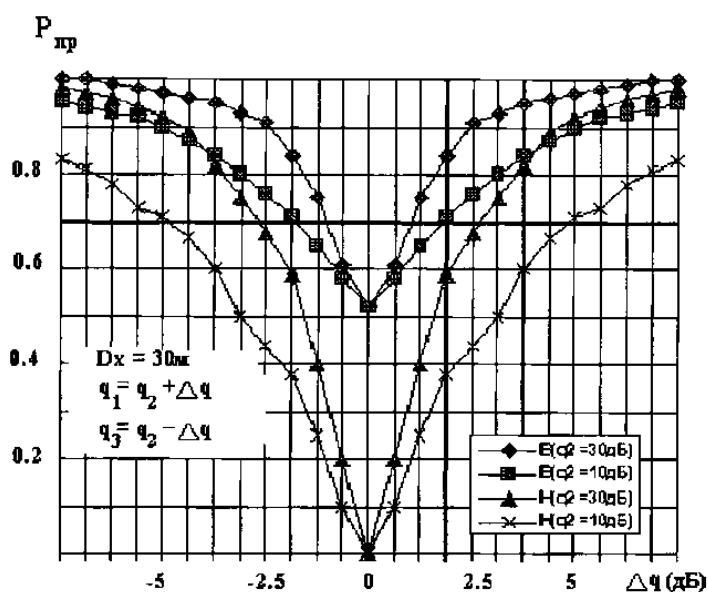


Рис. 3.8. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от различий в суммарной ЭПР целей (при фиксированных значениях суммарного отношения сигнал/шум; цели не отличаются размерами)

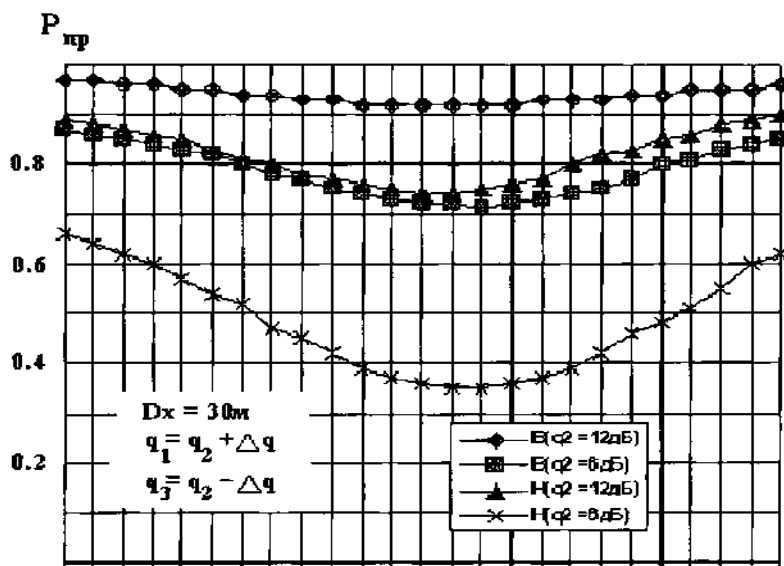


Рис. 3.9. Верхние (В) и нижние (Н) границы вероятностей правильной классификации в зависимости от различий в суммарной ЭПР целей (при фиксированных значениях суммарного отношения сигнал/шум; цели отличаются размерами)

3.3 Методика расчета эффективности классификации ПРЦ по радиолокационному портрету

3.3.1 Проблема анализа эффективности алгоритмов классификации

Сложившаяся практика решения задачи классификации ПРЦ предполагает, что процедура синтеза искусственной апертуры антенны выполнена в результате первичной обработки радиолокационного сигнала, а распознающему автомату предъявляются данные в виде отдельных отсчетов с выхода устройства детектирования, иначе говоря, в виде отсчетов радиолокационного изображения или выборочного радиолокационного портрета ПРЦ.

В качестве основного метода классификации, разумно сочетающего близость к оптимальному с относительно простой технической реализацией, может быть использован следующий алгоритм принятия решения о классе ПРЦ, предложенный в главе 2. В качестве решения принимается гипотеза о классе с номером \hat{k} , для которого выполняется соотношение:

$$\hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} l(k) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} \left[\frac{\eta_i}{\xi_i^k} + \ln \xi_i^k \right] \right\}, \quad (3.3.1)$$

где $\eta_i = |F_i|^2$ - i -й отсчет РЛИ наблюдаемого ПРЦ,

$\xi_i^k = 1 + \hat{q}_i$ - i -й отсчет ожидаемого значения ЭПР (радиолокационного портрета) цели k -го класса.

В результате сравнения статистик $l(k)$ указывается номер \hat{k} класса ПРЦ, принимаемого за истинный. Выбранный алгоритм базируется на предположении о статистической независимости отдельных отсчетов РЛИ η_i и их принадлежности к экспоненциальным распределениям (если распределение входной реализации гауссовское с нулевым математическим ожиданием) с параметрами ξ_i^k , зависящими от номера класса ПРЦ. Суммирование в (3.3.1) производится по области Ω_k , которая, в свою очередь, так же определяется предполагаемым классом цели.

Анализ точности классификации заключается в расчете вероятностей ошибочных и истинных решений о классах наблюдаемых ПРЦ. Вероятность принятия решения о справедливости k -й гипотезы при условии, что истинна 1-я, определяется выражением:

$$P(k/l) = \int_G \sigma(\gamma_k/\bar{\eta}) P(\bar{\eta}/l) d\bar{\eta}, \quad (3.3.2)$$

где G - пространство решений,

$\sigma(\gamma_k/\bar{\eta})$ – правило решения,

$\bar{\eta}$ - вектор принимаемых данных,

$P(\bar{\eta}/l)$ – плотность распределения принимаемых данных при условии, что истинна гипотеза “1”.

Производя замену переменных и выбирая в качестве новой переменной функцию

$$y_k = l(k), \quad (3.3.3)$$

приходим к записи выражения для вероятности ошибки в виде многомерного интеграла от совместного распределения статистик y_1, \dots, y_N по той области пространства решений, которая соответствует k -й гипотезе:

$$P(k/l) = \int_{G_k} \dots \int W^{(1)}(y_1, \dots, y_M) dy_1 \dots dy_M, \quad (3.3.4)$$

где $W^{(1)}(\bar{y})$ - совместная плотность распределения случайных величин y_1, \dots, y_M при условии, что принимается 1-я гипотеза;

M - общее число принимаемых гипотез;

G_k - область пространства решений, соответствующая принятию k -й гипотезы.

В рассматриваемом случае пределы интегрирования в выражении для вероятности принятия решения о наличии цели k -го класса при наблюдении цели 1-го класса могут быть конкретизированы:

$$P(k/l) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_k \int_{-\infty}^{y_k} \dots \int_{-\infty}^{y_k} W^{(1)}(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N. \quad (3.3.5)$$

Плотность распределения $W^{(l)}(\bar{y})$ выражается через значения отсчетов РЛИ с помощью формулы:

$$W^{(l)}(\bar{y}) = \int_{\Gamma} P(\bar{\eta}/l) \prod_{\alpha=1}^M \sigma(y_{\alpha} Y(\alpha)) d\bar{\eta}. \quad (3.3.6)$$

С учетом независимости компонент вектора наблюдений $\bar{\eta}$ плотность вероятности $P(\bar{\eta}/l)$ имеет вид:

$$P(\bar{\eta}/l) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\xi_i^{(l)}} \exp\left(-\frac{\eta_i}{\xi_i^{(l)}}\right), \quad (3.3.7)$$

где N – размерность вектора наблюдений $\bar{\eta}$.

Определим σ - функцию, входящую в (3.3.5), следующим образом:

$$\delta(y_{\alpha} - Y(\alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-jz_{\alpha}[y_{\alpha} - Y(\alpha)]\} dz_{\alpha}.$$

Подставляя (3.3.2) в (3.3.7) и (3.3.6) в (3.3.5), получим:

$$W^{(l)}(\bar{y}) = \int_{\Gamma} \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{\xi_i^{(l)}} e^{\frac{\eta_i}{\xi_i^{(l)}}} \right\} * \left\{ \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{\alpha=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jz_{\alpha}(y_{\alpha} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i}{\xi_i^{(\alpha)}} + \sum_{i=1}^N \ln \xi_i^{(\alpha)}] dz_{\alpha} \right\} d\eta_1 \dots d\eta_N. \quad (3.3.8)$$

После замены переменных:

$$x_{\alpha} = y_{\alpha} + \sum_{i=1}^N \ln \xi_i^{(\alpha)} \quad (3.3.9)$$

определим характеристическую функцию, соответствующую плотности распределения

$$F(z_1, \dots, z_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp\left[j \sum_{i=1}^M z_i y_i\right] W^{(l)}(y_1 \dots y_M) dy_1 \dots dy_M = \\ \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 + j \sum_{\alpha=1}^M \frac{\xi_i^{(l)}}{\xi_i^{(\alpha)}} z_{\alpha}}. \quad (3.3.10)$$

Для определения плотности вероятности $W^{(l)}(\bar{x})$ найдем обратное преобразование Фурье от последнего выражения (3.3.10):

$$W^{(l)}(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp\left[-j \sum_{\alpha=1}^M z_{\alpha} x_{\alpha}\right] F(z_1 \dots z_M) dz_1 \dots dz_M =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 + j \sum_{\alpha=1}^M \frac{\xi_i^{(l)}}{\xi_i^{(\alpha)}} z_{\alpha}} \right\} e^{-j \sum_{\alpha=1}^M z_{\alpha} x_{\alpha}} dz_1 \dots dz_M. \quad (3.3.11)$$

Вычисление полученного интеграла приводит к чрезвычайно громоздким результатам. И тем не менее эти вычисления следовало бы привести при том условии, что полученные выражения носили бы конструктивный характер, а именно позволяли бы рассчитать вероятности ошибочных решений.

Поэтому рассмотрим вначале частный случай, при котором вычисление (3.3.11) тривиально и убедимся в степени продуктивности полученного решения для анализа эффективности распознавания в целом.

Допустим, что размерность вектора наблюдений, равная N , совпадает с числом конкурирующих гипотез M . На практике обычно выполняется неравенство $N > M$. Тем не менее, такое предположение не лишено целесообразности. Оно приводит к расширению числа классов ПРЦ - появлению подклассов в пределах каждого класса, что делает задачу анализа эффективности классификации более детальной. После расчета вероятностей ошибок, если, разумеется, такой расчет удастся осуществить аналитическими методами, результаты можно «заглубить», объединяя вероятности ошибочных решений внутри подкласса.

После замены переменных:

$$p = \sum_{\alpha=1}^M \frac{\xi_i^{(l)}}{\xi_i^{(\alpha)}} z_{\alpha} \quad (3.3.12)$$

или в матричной записи:

$$Q^{(l)} \bar{Z} = \bar{P},$$

где
$$Q^{(l)} = \|q_{ij}^{(l)}\| = \left\| \frac{\xi_i^{(l)}}{\xi_i^{(j)}} \right\| \quad (3.3.13)$$

и предположения о том, что матрица Q - неособенная, перепишем формулу (3.3.11):

$$\begin{aligned} W^{(l)}(\bar{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 + j p_i} \right\} \frac{1}{|Q^{(l)}|} e^{-j [Q^{(l)-1} \bar{P}]} d\bar{P} = \\ &= \frac{1}{|Q^{(l)}|} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + j p_i} e^{-j p_i y_i} dp_i. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

В последнем выражении приняты следующие обозначения:

$$\gamma_i = \sum_{l=1}^M x_i c_{il}, \quad (3.3.15)$$

где, в свою очередь, c_{il} - элемент матрицы:

$$C = (Q^{(l)})^{-1}. \quad (3.3.16)$$

Интегралы, стоящие в (3.3.14), легко вычисляются, и выражение для плотности вероятности принимает вид:

$$W^{(l)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|Q^{(l)}|} e^{\sum_{ij}^N x_i c_{ij}} & \text{если } \sum_i^N x_i c_{ji} < 0 \text{ для каждого } j = \overline{1, M}; \\ 0 & \text{если } \sum_i^N x_i c_{ji} > 0 \text{ для каждого } j = \overline{1, M}; \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Подставив (3.3.17) в выражение (3.3.5), получим формулу для расчета вероятностей ошибок:

$$P(k/l) = \int dx \int^{x_k + \sum^M \ln(\xi_i^{(l)}/\xi_i^{(k)})} \dots \int^{x_k + \sum^M \ln(\xi_i^{(N)}/\xi_i^{(k)})} * \\ * \frac{1}{|Q^{(l)}|} e^{\sum^N x_i \sum^M c_{ij}} dx_1 \dots dx_n, \quad (3.3.18)$$

при условии $\sum_{i=1}^N x_i c_j < 0$ для каждого $j = \overline{1, M}$.

Вычисление последнего интеграла аналитическими методами представляет собой непреодолимую задачу, что, в частности подтверждается аналогичными выводами, проделанными в [104]. Общий случай ($M \neq N$) еще более сложен. В связи с этим особое внимание должно быть уделено приближенным методам вычисления вероятностей ошибок, к рассмотрению которых мы переходим в следующих параграфах. Безусловно, особый интерес для анализа алгоритма классификации представляет метод статистического моделирования, который и с формальной точки зрения является одним из наиболее мощных методов вычисления многомерных интегралов. Этот метод будет использован при анализе информативности геометрических и «моментовых» признаков.

3.3.2. Вывод расчетных выражений для оценки вероятностей правильных и ошибочных решений при классификации ПРЦ по РЛИ

Рассмотрим приближенный метод [7] определения вероятностей правильных и ошибочных выборов гипотез о классах ПРЦ. Алгоритм проверки гипотез принимает решение об истинности класса ПРЦ, если соответствующее ему значение статистики:

$$l(k) = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\eta_i}{\xi_i^{(k)}} + \ln \xi_i^{(k)} \right), \quad (3.3.19)$$

основанной на модели плотности вероятности наблюдаемого вектора (3.3.7), принимает максимальное значение.

Для выходной статистики, построенной в предположении, что ПРЦ соответствует k -му классу при условии, что на самом деле вектор наблюдаемых данных $\bar{\eta}$ соответствует 1-му классу, введем обозначение $l^{(1)}(k)$.

Ошибка классификации имеет место в том случае, когда при наблюдении РЛИ ПРЦ 1-го класса выносится решение в пользу ПРЦ k -го класса. Такая ситуация наступает, если выходной эффект, соответствующий k -й гипотезе $1^{(1)}(k)$, оказывается больше, чем выходной эффект, соответствующий истинной гипотезе 1:

$$l^{(1)}(k) > l^{(1)}(1). \quad (3.3.20)$$

Вероятность этого события определяется выражением:

$$\begin{aligned} P[l^{(1)}(k) > l^{(1)}(1)] &= P[l^{(1)}(k) - l^{(1)}(1) > 0] = \\ &= P\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\xi^{(1)}} - \frac{1}{\xi^{(k)}}\right) \eta_i > \sum_{i=1}^m \ln \frac{\xi_i^{(k)}}{\xi^{(1)}}\right]. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

В общем случае формула для вероятности правильного решения может быть записана следующим образом:

$$P(1/1) = 1 - P\left[l^{(1)}(k) > l^{(1)}(1) \text{ для любых } k = \overline{1, m}\right]. \quad (3.3.22)$$

Поскольку выходной эффект $1^{(1)}(k)$ может превышать статистику $1^{(1)}(1)$ при нескольких значениях k (события совместны), точный расчет вероятностей в правой части (3.3.22) довольно сложен (формально эта процедура не отличается от описанной в предыдущем параграфе). Однако, используя только вероятности (3.3.21), удастся записать выражение для нижней границы вероятности правильного решения:

$$P(1/1) \geq 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^M P[l^{(1)}(k) > l^{(1)}(1)] \quad (3.3.23)$$

Следует иметь в виду, что с повышением точности классификации нижняя граница вероятности правильного решения (3.3.23) приближается к истинному значению вероятности. Действительно, чем выше эффективность устройства классификации, тем меньше вероятность события, заключающегося в том, что выходные эффекты, соответствующие двум и более ложным гипотезам, будут превышать статистику (3.3.19), соответствующую наблюдению истинной цели. Приведенное заключение имеет тем больше оснований, чем меньше число конкурирующих гипотез, что соответствует

рассматриваемой ситуации классификации ПРЦ.

Введем обозначения:

$$u = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\xi_i^{(l)}} - \frac{1}{\xi_i^{(k)}} \right) \eta_i, \quad (3.3.24)$$

$$Q = \sum_{i=1}^N \ln \frac{\xi_i^{(k)}}{\xi_i^{(l)}} \quad (3.3.25)$$

причем $\xi_i^{(l)} \# \xi_i^{(k)}$ (в противном случае отсчеты конкурирующих РЛИ не отличаются и соответствующие значения ЭПР исключаются из рассмотрения),

$$p_l^k = P[l^{(l)}(k) > l^{(l)}(l)], \quad (3.3.26)$$

где
$$p_l^k = P\left(\frac{k}{l}\right) = \int_Q^\infty W\left(\frac{u}{l}\right) du. \quad (3.3.27)$$

В (3.3.27) функция $W(u/1)$ представляет собой плотность распределения вероятностей случайной величины u , определенной из (3.3.24), при условии, что случайные величины η_i , как это следует из исходной постановки задачи, имеют плотность распределения вероятностей:

$$W(\eta) = \frac{1}{\xi_i^{(l)}} e^{-\frac{\eta_i}{\xi_i^{(l)}}}. \quad (3.3.28)$$

Характеристическая функция, соответствующая распределению (3.3.28), имеет вид:

$$\theta_{\eta_i}(V) = \frac{1}{1 - jV\xi_i^{(l)}}. \quad (3.3.29)$$

Обозначив

$$g = \frac{1}{\xi_i^{(l)}} - \frac{1}{\xi_i^{(k)}}, \quad (3.3.30)$$

найдем характеристическую функцию величины $g_i \eta_i$:

$$\theta_{g\eta} = \frac{1}{1 - jvg_i\xi_i^{(l)}}. \quad (3.3.31)$$

Характеристическая функция для u определяется как характеристическая функция суммы независимых случайных величин:

$$\theta_u(V) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - jvg_i\xi_i^{(l)}}. \quad (3.3.32)$$

Преобразовав (3.3.32) по Фурье, находим плотность вероятности:

$$W\left(\frac{u}{l}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - jv\xi_i^{(l)}g_i} \right) e^{-jvu} dv. \quad (3.3.33)$$

Обозначим

$$\xi_i = \frac{1}{\xi_i^{(l)} g_i} \quad (3.3.34)$$

и перепишем выражение(3.3.33):

$$W(u/l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^N \frac{\xi_j}{\xi_i - jv} \right) e^{-jvu} dv. \quad (3.3.35)$$

Для вычисления полученного интеграла (3.3.35) рассмотрим типовые практически важные ситуации и примем ряд предположений. Будем считать, что каждое из распознаваемых РЛИ: 1-е и k -е в общем случае содержат $m_B^{(j)}$ ($j=1, M$) отсчетов, вызванных наличием "блестящих" точек, $m_{\Pi}^{(j)}$ ($j=1, M$) отсчетов, определяющихся диффузионными отражениями от распределённой поверхности ПРЦ и $m_M^{(j)}$ ($j=1, M$) отсчетов от подстилающей поверхности. Отсчеты от "блестящих" точек на каждом из РЛИ отличаются по величине ЭПР как между собой, так и между отсчетами от "блестящих" точек, распределённой и подстилающей поверхности на "своем" и конкурирующем РЛИ. Иначе ведут себя отсчеты, соответствующие распределённой поверхности: в пределах "своего" РЛИ они не отличаются по величине ЭПР и, следовательно, отличаются от отсчетов распределённой поверхности другого РЛИ на постоянную величину. Относительно подстилающей поверхности могут быть высказаны аналогичные соображения. Из сказанного следует, что при наличии $m_{\text{КП}}$ отсчетов распределённой поверхности на одинаковых позициях двух РЛИ такова же кратность полюсов подынтегрального выражения. Если число элементов двух РЛИ, имеющих одинаковые расположения и "занятых" МП, равно $m_{\text{КМ}}$, то в подынтегральном выражении столько же одинаковых полюсов, разумеется, отличающихся по значению от "полюсов подстилающей поверхности".

При выполнении принятых предположений вычислим интеграл (3.3.35):

$$\begin{aligned} W(u/l) = & \sum_{q \in M_B} \xi_q e^{-\xi_q u} \prod_{\substack{i \in M_B \\ i \neq q}} \frac{\xi_i}{\xi_i - \xi_q} l(\xi_q) + \\ & + \left\{ \frac{1}{(m_{k\Pi} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_{\Pi}} \frac{d^{m_{k\Pi}-1}}{dp^{m_{k\Pi}-1}} \left[e^{-pu} \frac{\xi_{\Pi}^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{k\Pi}}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(\xi_{\Pi}) + \\ & + \left\{ \frac{1}{(m_{kM} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_M} \frac{d^{m_{kM}-1}}{dp^{m_{kM}-1}} \left[e^{-pu} \frac{\xi_{\Pi}^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}}}{(\xi_{\Pi} - p)^{m_{k\Pi}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(\xi_M) \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

при $u > 0$

где $l(x) = \begin{cases} 1 & x > 0; \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

В выражении (3.3.36) суммирование производится лишь по тем индексам, для которых $\zeta_q > 0$ ($q \in M_B$, причем M_B - множество тех позиций 1-го и k -го РЛИ, на которых расположены "блестящие точки", другими словами, множество некротных полюсов).

При $u < 0$ интеграл (3.3.35) выглядит аналогично.

$$\begin{aligned}
W(u/l) = & \sum_{q \in M_B} \xi_q e^{-\xi_q u} \prod_{\substack{i \in M_B \\ i \neq q}} \frac{\xi_i}{\xi_i - \xi_q} l(-\xi_q) + \\
& + \left\{ \frac{1}{(m_{k\Pi} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_\Pi} \frac{d^{m_{k\Pi}-1}}{dp^{m_{k\Pi}-1}} \left[e^{-pu} \frac{\xi_\Pi^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(-\xi_\Pi) + \\
& + \left\{ \frac{1}{(m_{kM} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_M} \frac{d^{m_{kM}-1}}{dp^{m_{kM}-1}} \left[e^{-pu} \frac{\xi_\Pi^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(-\xi_M)
\end{aligned} \quad (3.3.37)$$

В последнем выражении суммирование производится лишь по тем индексам, для которых $\zeta_i < 0$.

После подстановки (3.3.36) и (3.3.37) в (3.3.27) найдем формулу для вычисления вероятности превышения ложным выходным эффектом истинного.

а) при $Q > 0$:

$$\begin{aligned}
p_l^k = & \sum_{q \in M_B} e^{-\xi_q Q} \prod_{\substack{i \in M_B \\ i \neq q}} \frac{\xi_i}{\xi_i - \xi_q} l(\xi_q) + \\
& + \left\{ \frac{1}{(m_{k\Pi} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_\Pi} \frac{d^{m_{k\Pi}-1}}{dp^{m_{k\Pi}-1}} \left[e^{-\xi_\Pi Q} \frac{\xi_\Pi^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(\xi_\Pi) + \\
& + \left\{ \frac{1}{(m_{kM} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_M} \frac{d^{m_{kM}-1}}{dp^{m_{kM}-1}} \left[e^{-\xi_M Q} \frac{\xi_\Pi^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(\xi_M)
\end{aligned} \quad (3.3.38)$$

где r - номера тех индексов, для которых $\zeta_q > 0$.

б) при $Q < 0$:

$$\begin{aligned}
p_l^k = & \sum_{q \in M_B} (1 - e^{-\xi_q Q}) \prod_{\substack{i \in M_B \\ i \neq q}} \frac{\xi_i}{\xi_i - \xi_q} l(-\xi_q) + \sum_{r \in M_B} \prod_{\substack{i \in M \\ i \neq r}} \frac{\xi_i}{\xi_i - \xi_r} l(\xi_r) + \\
& + \left\{ \frac{1}{(m_{k\Pi} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_\Pi} \frac{d^{m_{k\Pi}-1}}{dp^{m_{k\Pi}-1}} \left[(1 - e^{-\xi_\Pi Q}) \frac{\xi_\Pi^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(-\xi_\Pi) +
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{(m_{kM} - 1)!} \lim_{p \rightarrow \xi_M} \frac{d^{m_{kM}-1}}{dp^{m_{kM}-1}} \left[(1 - e^{-\xi_M Q}) \frac{\xi_{\Pi}^{m_{k\Pi}} \xi_M^{m_{kM}-1}}{(\xi_M - p)^{m_{kM}}} \prod_{i \in M_B} \left(\frac{\xi_i}{\xi_i - p} \right) \right] \right\} l(-\xi_M) \quad (3.3.39)$$

Вычисления по приведенным формулам неоправданно громоздки и могут быть существенно упрощены в соответствии со следующими предположениями:

а) размер фрагмента РЛИ выбирается таким образом, чтобы не превышать максимальных размеров РЛИ ПРЦ, что заведомо ограничивает возможное число отсчетов, приходящихся на подстилающую поверхность;

б) отношение сигнал/фон в каждом элементе разрешения, содержащем отсчеты, принадлежащие цели, для реальных РЛИ составляет не менее 10 дБ;

в) в "блестящих" точках РЛИ ПРЦ сосредоточено, по крайней мере, 80 % ее ЭПР.

Высказанные предположения позволяют отказаться от учета отсчетов, соответствующих распределённой и подстилающей поверхностям на конкурирующих РЛИ. Очевидно, что следствием такого условия будет некоторое увеличение вероятностей ошибок и снижение нижней границы вероятности правильной классификации, что, естественно, приведет к несколько заниженным оценкам качества распознавания. При этом в формулах (3.3.38) и (3.3.39) будут отсутствовать два последних слагаемых: именно в таком варианте они могут быть использованы для анализа эффективности классификации при задании ЭПР ПРЦ в виде совокупности "блестящих" точек, распределенных по поверхности цели. При этом расчетная формула для определения вероятности правильной классификации ПРЦ k-го класса выглядит следующим образом:

$$p(l/l) \geq 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^M \sum_{q \in M_B} e^{-\xi_q^{lk} Q} \prod_{\substack{i \in M_B \\ i \neq q}} \frac{\xi_i^{lk}}{\xi_i^{lk} - \xi_q^{lk}} l(\xi_q^{lk})$$

при $Q > 0$.

$$p(l/l) \geq 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^M \left\{ \sum_{q \in M_B} (1 - e^{-\xi_q^{lk} Q}) \prod_{\substack{i \in M_B \\ i \neq q}} \frac{\xi_i^{lk}}{\xi_i^{lk} - \xi_q^{lk}} l(-\xi_q^{lk}) + \right. \\ \left. + \sum_{q \in M_B} \prod_{i \in M_B} \frac{\xi_i^{lk}}{\xi_i^{lk} - \xi_q^{lk}} l(\xi_q^{lk}) \right\}$$

при $Q < 0$.

(3.3.40)

В выражении (3.3.40) приняты следующие обозначения:

$$\xi_i^{lk} = 1 - \frac{\xi_i^l}{\xi_i^k},$$

$$Q = \sum_{i=1}^N \ln \frac{\xi_i^k}{\xi_i^l}.$$

Рассмотренный выше метод анализа предполагает наличие априорной информации о числе, ЭПР и распределении "блестящих" точек по координатам поверхности ПРЦ. Количество такой информации существенно ограничено в связи с явно недостаточным объемом экспериментальных данных, натурного и полунатурного моделирования. Из сказанного следует, что как построение алгоритмов распознавания, так и соответствующий анализ следует производить исходя из существенно более простых моделей РЛИ, учитывающих лишь безусловно присутствующие объективные отличия между распознаваемыми классами, к которым относятся различия в размерах и ЭПР.

Поскольку в этом случае индивидуальные особенности радиолокационных портретов ПРЦ не учитываются, оценки вероятностей правильной и ложной классификации будут ниже истинных, что не приведет к излишне оптимистическим выводам об эффективности классификации.

Предположим, что РЛИ ПРЦ k -го класса представляет собой совокупность n_k экспоненциально распределенных независимых отсчетов, принадлежащих цели, и, соответственно, $m - n_k$ отсчетов, созданных только шумом, причем, "целевые" отсчеты имеют одинаковую между собой ЭПР, равную σ_k/n_k (σ_k - интегральная ЭПР цели k -го класса, а параметр экспоненциального распределения "шумовых" отсчетов равен $\sigma_{\text{ш}}$).

В этом случае оптимальный алгоритм классификации может быть синтезирован по критерию максимального правдоподобия, в соответствии с которым решения принимается в пользу той гипотезы, для которой отношение правдоподобия максимально:

$$\hat{k} = \operatorname{argmax} \Delta(n_k, \sigma_k) = \operatorname{argmax} \frac{W(\bar{\eta}/n_k, \sigma_k)}{W(\bar{\eta}/\text{шум})}. \quad (3.3.41)$$

где $W(\bar{\eta}/n_k, \sigma_k)$ - плотность вероятности вектора наблюдаемых данных $\bar{\eta}$ при наличии цели k -го класса,

$W(\bar{\eta}/\text{шум})$ - плотность вероятности вектора наблюдаемых данных $\bar{\eta}$ при наличии только шума.

При экспоненциальном распределении вероятностей отсчетов РЛИ отношение правдоподобия может быть записано в следующем виде:

$$\Delta(n, \sigma) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_k}{\sigma_{\text{ш}} n_k}\right)^{n_k}} \exp \left\{ \frac{\frac{\sigma_k}{n_k \sigma_{\text{ш}}}}{1 + \frac{\sigma_k}{n_k \sigma_{\text{ш}}}} \sum_{n_k} x_i \right\}, \quad (3.3.42)$$

где $x_i = \frac{\eta_i}{\sigma_{\text{ш}}}$.

Вероятность принятия k -й гипотезы при истинной гипотезе с номером 1 находится из условия:

$$P\{I^1(k) > I^1(l)\} = P\left\{ \frac{\frac{\sigma_k}{n_k \sigma_{III}} \sum_{\Pi_k} x_i - \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{III}} \sum_{\Pi_l} x_i > \ln \frac{\left(1 + \frac{\sigma_k}{n_k \sigma_{III}}\right)^{n_k}}{\left(1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{III}}\right)^{n_l}} \right\}. \quad (3.3.43)$$

В рассматриваемой ситуации гипотезы могут быть упорядочены следующим образом: с возрастанием номера гипотезы как размеры ПРЦ, так и ее интегральная ЭПР уменьшаются, то есть при $K > 1$ считаем, что $n_k < n_l$ и наоборот. Введем обозначения:

$$\beta_k = \frac{\frac{\sigma_k}{n_k \sigma_{III}}}{1 + \frac{\sigma_k}{n_k \sigma_{III}}}$$

при $k > l$ ($n_l > n_k$),

$$y = (\beta_k - \beta_l) \sum_{n_k} x_i - \beta_l \sum_{n_l - n_k} x_i \quad (3.3.44)$$

при $k < l$ ($n_k > n_l$),

$$y = (\beta_k - \beta_l) \sum_{n_l} x_i + \beta_k \sum_{n_k - n_l} x_i$$

Поскольку справедливой считается 1-я гипотеза, в случае "а" плотность вероятности случайной величины x_i равна

$$W(x_i) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{III}}} \exp\left(-\frac{x_i}{1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{III}}}\right) \text{ при } x_i > 0 \quad (3.3.45)$$

в первой и второй суммах, а в случае "б" плотность вероятности в первой сумме определяется в соответствии с выражением (3.3.45), а во второй сумме:

$$W(x_i) = \exp(-x_i).$$

После определения характеристической функции и плотности вероятности случайной величины y найдем расчетные выражения для вероятностей ошибочных и верных решений относительно принятия k -й гипотезы при истинной гипотезе с номером 1.

При $k > l$; $\xi_1^{kl} > 0$; $Q > 0$:

$$p_l^k = \frac{1}{(n_l - n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{\xi_2^l}} \frac{d^{n_l - n_k - i}}{dp^{n_l - n_k - l}} \left\{ \frac{(-1)e^{pQ}}{p(\xi_1^{kl})^{n_k} (\xi_2^l)^{n_l - n_k - 1} (p \frac{1}{\xi_1^{kl}})} \right\}.$$

При $k > l$; $\xi_1^{kl} > 0$; $Q < 0$:

$$p_l^k = \frac{1}{(n_k - 1)!} \frac{(-1)^{n_k}}{(\xi_1^{kl})^{n_k} (\xi_2^l)^{n_l - n_k}} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{\xi_1^{kl}}} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left\{ \frac{1 - e^{pQ}}{\left(p + \frac{1}{\xi_2^l}\right)^{n_l - n_k}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{(n_l - n_k - 1)!} \frac{(-1)^k}{(\xi_1^{kl})^{n_k} (\xi_2^l)^{n_l - n_k}} \lim_{p \rightarrow \frac{-1}{\xi_2^l}} \frac{d^{n_l - n_k - 1}}{dp^{n_l - n_k - 1}} \left\{ \frac{1}{\left(p - \frac{1}{\xi_1^{kl}}\right)^{n_k}} \right\}.$$

При $k > 1$; $\xi_1^{kl} < 0$; $Q > 0$:

$$p_l^k = \frac{(-1)^{n_k}}{(\xi_1^{kl})^{n_k} (\xi_2^l)^{n_l - n_k}} \left\{ \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{-1}{|\xi_1^{kl}|}} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left[\frac{e^{pQ}}{p \left(p + \frac{1}{\xi_2^l}\right)^{n_l - n_k}} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{(n_l - n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{-1}{\xi_2^l}} \frac{d^{n_l - n_k - 1}}{dp^{n_l - n_k - 1}} \left[\frac{e^{pQ}}{p \left(p - \frac{1}{\xi_1^{kl}}\right)^{n_k}} \right].$$

При $k > 1$; $\xi_1^{kl} < 0$; $Q < 0$:

Результат – предыдущая формула при $Q = 0$.

При $k < 1$; $\xi_1^{kl} > 0$; $Q > 0$:

$$p_l^k = 0.$$

При $k < 1$; $\xi_1^{kl} > 0$; $Q < 0$:

$$p_l^k = \frac{(-1)^{n_k}}{(\xi_1^{kl})^{n_l} (\xi_3^k)^{n_k - n_l}} \left\{ \frac{1}{(n_l - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{\xi_1^{kl}}} \frac{d^{n_l - 1}}{dp^{n_l - 1}} \left[\frac{1 - e^{pQ}}{p \left(p - \frac{1}{\xi_3^k}\right)^{n_k - n_l}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n_k - n_l - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{\xi_3^k}} \frac{d^{n_k - n_l - 1}}{dp^{n_k - n_l - 1}} \left[\frac{1 - e^{pQ}}{p \left(p - \frac{1}{\xi_1^{kl}}\right)^{n_l}} \right] \right\}.$$

При $k < 1$; $\xi_1^{kl} < 0$; $Q > 0$:

$$p_l^k = \frac{(-1)^{n_k}}{(\xi_1^{kl})^{n_k} (\xi_2^l)^{n_l - n_k}} \left\{ \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{|\xi_1^{kl}|}} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left[\frac{-e^{pQ}}{p \left(p + \frac{1}{\xi_2^l}\right)^{n_l - n_k}} \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{(n_l - n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{-1}{\xi_2^l}} \frac{d^{n_l - n_k - 1}}{dp^{n_l - n_k - 1}} \left[\frac{-e^{pQ}}{p \left(p - \frac{1}{\xi_1^{kl}} \right)^{n_k}} \right] \Bigg\}.$$

При $k < l$; $\xi_1^{kl} < 0$; $Q < 0$:

$$\begin{aligned} p_l^k = & \frac{(-1)^{n_k}}{(\xi_1^{kl})^{n_l} (\xi_3^k)^{n_k - n_l}} \left\{ \frac{1}{(n_k - n_l - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{\xi_3^k}} \frac{d^{n_k - n_l - 1}}{dp^{n_k - n_l - 1}} \left[\frac{1 - e^{pQ}}{p \left(p - \frac{1}{\xi_1^{kl}} \right)^{n_l}} \right] + \right. \\ & + \frac{(-1)^{n_k}}{(\xi_1^{kl})^{n_k} (\xi_2^l)^{n_l - n_k}} \left\{ \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{|\xi_1^{kl}|}} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left[\frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\xi_2^l} \right)^{n_l - n_k}} \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{(n_l - n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \frac{-1}{\xi_2^l}} \frac{d^{n_l - n_k - 1}}{dp^{n_l - n_k - 1}} \left[\frac{1}{p \left(p - \frac{1}{\xi_1^{kl}} \right)^{n_k}} \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

При записи выражения (3.3.46) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_1^{kl} &= \frac{1}{1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{\text{III}}}} \frac{1}{\beta_k - \beta_l}, \\ \xi_2^l &= \left(\frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{\text{III}}} \right)^{-1}, \\ \sigma_3^k &= (\beta_k)^{-1}. \end{aligned}$$

Существенного упрощения вычислений можно достичь при условии, что количество слагаемых в первой и второй суммах выражения (3.3.44) достаточно велико, чтобы считать справедливым предположение о нормализации случайной величины y . В этом случае статистика (3.3.44) гауссова и имеет следующие параметры.

При $k > 1$

$$\begin{aligned} M\{y\} &= \left(1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{\text{III}}} \right) (\beta_k n_k - \beta_l n_l), \\ D\{y\} &= \left(1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{\text{III}}} \right)^2 (n_k \beta_k^2 - 2n_k \beta_k \beta_l + n_l \beta_l^2). \end{aligned}$$

При $k < 1$

$$\begin{aligned} M\{y\} &= (\beta_k - \beta_l) n_l \left(1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{\text{III}}} \right) + \beta_k (n_l - k_k) \\ D\{y\} &= \left(1 + \frac{\sigma_l}{n_l \sigma_{\text{III}}} \right)^2 (\beta_k - \beta_l)^2 n_k + \beta_k^2 (n_k - n_l). \end{aligned}$$

Оценки вероятностей ошибочных и верных решений находится из очевидного соотношения:

$$p_l^k = 1 - \Phi \left\{ \frac{Q - M}{D^{1/2}} \right\}.$$

Приведенная методика позволяет рассчитать оценки вероятностей правильного решения о классификации ПРЦ при самых различных радиолокационных портретах - распределениях ЭПР по поверхности ПРЦ. В то же время расчеты могут оказаться неоправданно (для приближенной методики) сложными, если в составе радиолокационных портретов ПРЦ присутствует достаточно большое количество точек с одинаковыми (близкими) значениями ЭПР. В этом случае представляется целесообразным использовать несколько иную методику расчета, описанную ниже.

3.3.3. Оценка эффективности классификации при корнях большой кратности

Методологическая основа расчета информативности та же, что и в разделе 3.1. Мы по-прежнему считаем, что наиболее конструктивной характеристикой эффективности является конечный эффект работы алгоритма классификации, а именно, вероятность, (или ее оценка) правильной классификации.

Как показано в предыдущем разделе, для оценки вероятности правильной классификации необходимо рассчитать вероятность p_l^k принятия ошибочного решения в пользу k -й гипотезы при истинной первой.

Для расчета вероятности p_l^k воспользуемся предположением, о том, что компоненты (квадратурные составляющие на выходе линейной части устройства формирования РЛИ), образующие в результате вектор отсчетов радиолокационного портрета $\bar{\eta}$, статистически независимы и нормальны. В этом случае решение принимается в соответствии с алгоритмом (3.3.1) а вероятности p_l^k находятся в соответствии со следующим приближенным выражением:

$$p_l^k = \exp\{\mu_l^k(S) - S\dot{\mu}_l^k(S)\}, \quad (3.3.47)$$

где $\mu_l^k(S) = \ln \int \dots \int P^S(\bar{\eta}/k) P^{1-S}(\bar{\eta}/l) d\bar{\eta} =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{S(S-1)(m_{ki} - m_{li})^2}{S\sigma_{li}^2 + (1-S)\sigma_{ki}^2} \ln \frac{(\sigma_{ki}^2)^{1-S} (\sigma_{li}^2)^S}{S\sigma_{li}^2 + (1-S)\sigma_{ki}^2} \right\}, \quad (3.3.48)$$

причем S выбирается из условия $\dot{\mu}_l^k(S) = 0$.

В последнем выражении: m_{ki} - математическое ожидание, а σ_{ki}^2 - дисперсия i -й компоненты признака при наблюдении ПРЦ k -го класса. Для случая, аналогичного анализу алгоритма (3.3.1):

$$m_{ki} = 0 \quad (k = 1, M; i = 1, N); \quad \sigma_{ki}^2 = \xi_i^k \quad (3.3.49)$$

3.4. Анализ алгоритмов классификации по РЛИ ПРЦ

Проведение подробного анализа эффективности классификации ПРЦ аналитическими методами, изложенными в предыдущем разделе, ограничено банком существующих радиолокационных портретов. В качестве таких портретов используются модели трёх классов целей: «большая», «средняя» и «малая» с произвольным распределением «блестящих» точек по их поверхностям. Следует иметь в виду, что эти РП получены при идеализированных условиях, далеко не всегда соответствующих реальным возможностям проектируемых РЛС. Тем не менее, они могут служить отправной точкой для предварительных оценок возможностей решения задачи классификации. Расчет по формулам (3.3.38) - (3.3.39) для трех упомянутых типов ПРЦ позволяет получить следующую матрицу вероятностей правильных и ошибочных решений:

$$P = \begin{pmatrix} P(1/1) & P(2/1) & P(3/1) \\ P(1/2) & P(2/2) & P(3/2) \\ P(1/3) & P(2/3) & P(3/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.977 & 0.021 & 0.002 \\ 0.013 & 0.964 & 0.023 \\ 0.010 & 0.038 & 0.952 \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

где $P(l/k)$ - вероятность принятия решения в пользу 1-го класса при истинном - k . Номера соответствуют: 1 - "большая" цель, 2 - цель "среднего" класса и 3 - "малая" цель.

Результаты приведены для случая, когда какие-либо искажения радиолокационных портретов отсутствуют, а удельная ЭПР подстилающей поверхности (-30дБ) настолько мала, что ее величина практически не оказывает влияния на качество классификации. В связи с этим полученные результаты следует оценивать (по аналогии с разделом 4.2) как ориентировочные, оставляя более точные оценки до получения достоверных радиолокационных портретов ПРЦ.

Для анализа алгоритмов классификации в более широком спектре условий наблюдения, по-видимому, нет альтернативы методам статистического моделирования. В данном разделе приведены результаты такого моделирования для анализа эффективности классификации трех типов ПРЦ при двух вариантах разрешающей способности (12м и 24м), трех значениях удельной ЭПР МП (-30, -20 и -10дБ), и трех ракурсах наблюдения ПРЦ (0°, 45° и 90°). Примеры РЛИ показаны на рис. 3.10, а матрицы вероятностей - в табл. 3.1.

Примеры РЛИ (отдельные выборочные радиолокационные портреты, полученные при статистическом моделировании) соответствуют трем классам ПРЦ: класс N 1 (рисунки расположены в первом столбце); класс №2 (рисунки расположены во втором

столбце) и класс №3 (рисунки занимают третий столбец листа). РЛИ соответствуют трём ракурсам наблюдения (0^0 , 45^0 и 90^0), а также двум значениям ЭПР морской поверхности (-30 дБ – рисунки на верхней половина листа и -10 дБ – на нижней).

(Матрицы вероятностей классификации, соответствующие этим рисункам, приведены в таблице под номерами 1 и 3).

Если для группы верхних рисунков отношение сигнал/шум в среднем (по типам ПРЦ и ракурсам) составляет более 20 дБ и максимальная вероятность ошибки не превышает 0,1, то для нижних рисунков (особенно при «неудачном» ракурсе) решение задачи классификации становится невозможным. При ухудшении разрешающей способности в два раза (нижняя половина таблицы) вероятность ошибки возрастает в 2-3 раза.

Для получения конкретных выводов по другим типам целей и при других условиях наблюдения следует произвести соответствующее статистическое моделирование по предложенной методике.

3.5. Сравнительный анализ алгоритмов классификации, основанных на векторе достаточных статистик, в условиях априорной неопределённости

Как показано в главе 2, использование в качестве вектора признаков вектора достаточных статистик приводит к алгоритму (2.2.29). Применение этого алгоритма возможно в условиях, когда ракурс ПРЦ и соответствующий набор, по крайней мере, усреднённых радиолокационных портретов, известен, и банк данных таких РП сформирован. Последнее условие в большинстве практических ситуаций, как правило, не выполняется, что приводит к необходимости использовать признаки и алгоритмы, основанные на ограниченных сведениях о РП ПРЦ и условиях наблюдения. Сравнительный анализ эффективности ряда таких алгоритмов и является предметом обсуждения в данном разделе.

В дальнейшем считаем, что каждый отсчет РЛИ формируется как значение мгновенной мощности после когерентного суммирования в пределах всего времени, выделенного на синтезирование апертуры. При этом каждый такой отсчет имеет (в простейшем случае, когда отражения от поверхности ПРЦ содержат только диффузионную составляющую) экспоненциальную плотность вероятности:

$$W_k(\eta_i) = \frac{1}{\xi_i^k(\varphi)} \exp\left(-\frac{\eta_i}{\xi_i^k(\varphi)}\right). \quad (3.5.1)$$

В формуле (3.5.1) приняты следующие обозначения: $\eta_i = 0.5|F_i|^2$ - i -й отсчет РЛИ, i - номер отсчета изображения, которое представляет собой двумерное дискретное

множество Ω_m , $\xi_i^k(\varphi) = 1 + q_i^k(\varphi)$ – ожидаемое отношение сигнал/шум в i -м отсчете при условии, что наблюдается цель k -го класса при ракурсе φ .

Если отсчеты статистически независимы, то логарифм отношения правдоподобия имеет вид

$$l_k = -\sum_{i \in \Omega} \left[\frac{\eta_i}{\xi_i^k(\varphi)} + \ln \xi_i^k(\varphi) \right]. \quad (3.5.2)$$

При внешней простоте алгоритма (3.5.1) - (3.5.2) его практическая реализация, как уже упоминалось выше, неосуществима в связи с чрезвычайно громоздким перебором возможных значений опорных функций (по сути такие функции – распределения ЭПР по координатам ПРЦ).

В связи с этим введем ряд предположений, которые не носят характера принципиальных ограничений и позволяют вносить изменения, упрощающие реализацию алгоритма. Сформулируем предположения, принятые при анализе.

1. ПРЦ разделяются на три класса, отличающиеся по ЭПР и размерам. Суммарная ЭПР k -го класса равна σ_k^2 .

2. Зависимость общей ЭПР цели от ракурса аппроксимируется зависимостью

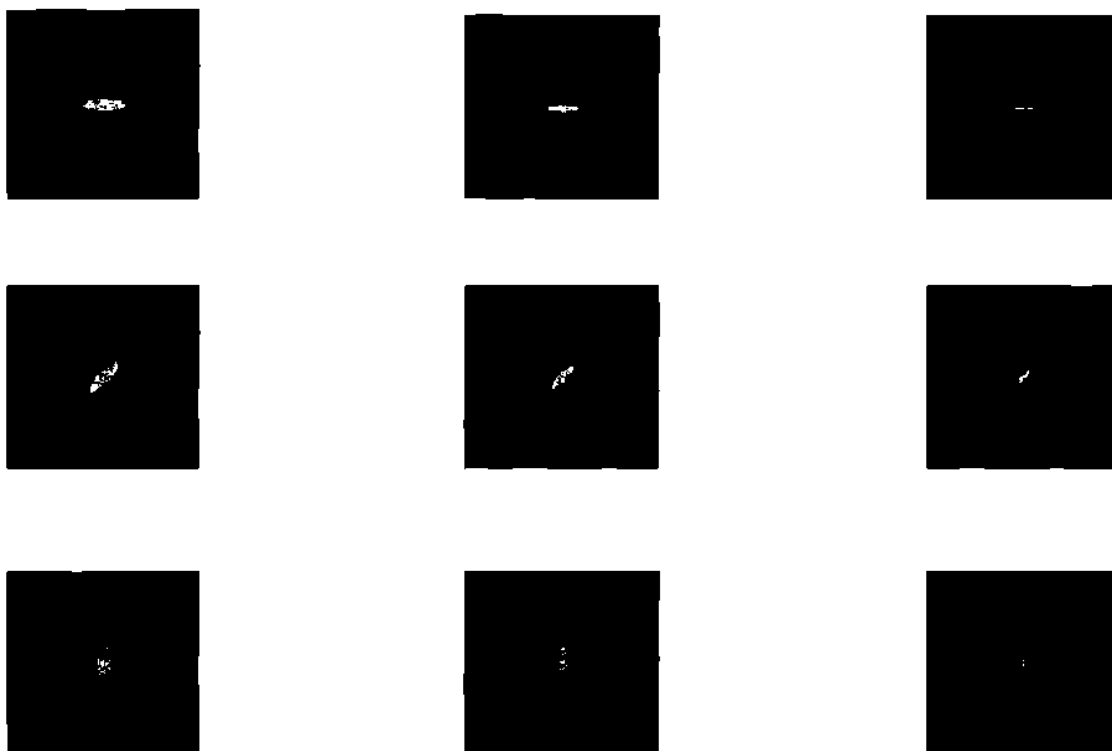
$$\sigma_k^2(\varphi) = \frac{\sigma_k^2}{1 - b|\varphi|^2}, \quad (3.5.3)$$

где значение $b=0.9/(\pi/2)^2$ принято из эмпирического условия, заключающегося в том, что при изменении ракурса от 0 до 90 величина ЭПР меняется приблизительно на 10 дБ [10].

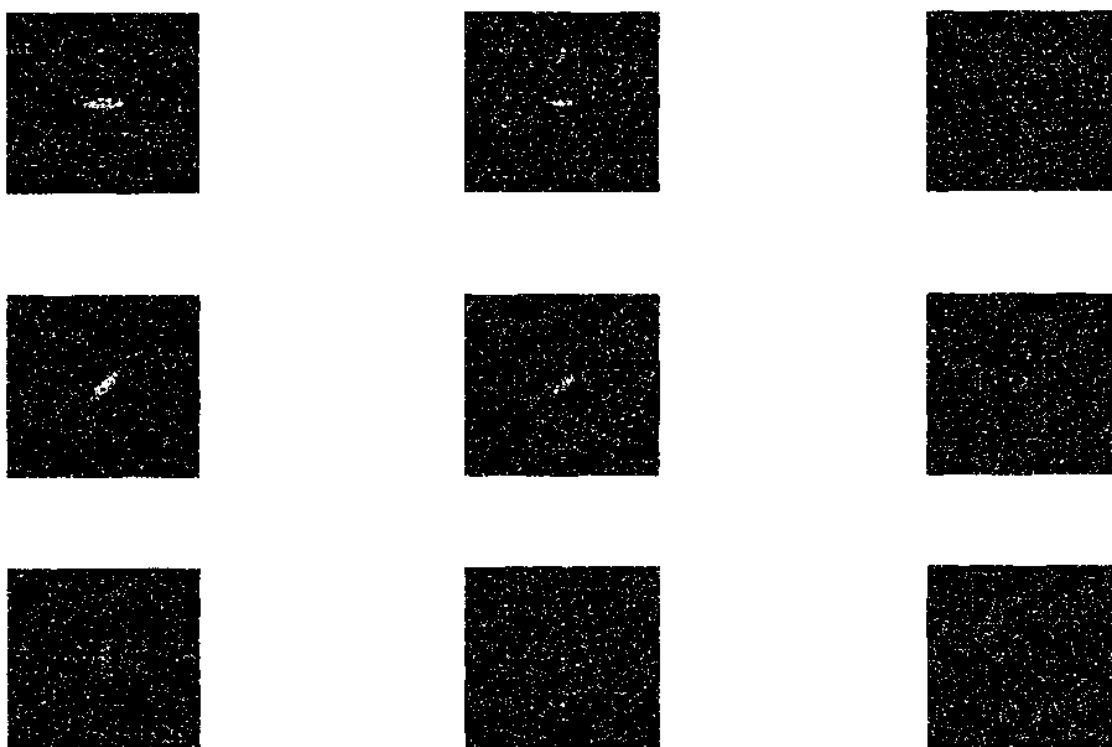
3. Распределение ЭПР по площади цели считается равномерным

$$\sigma_{ik}^2 = \frac{\sigma_k^2(\varphi)}{S_k(\varphi)}, \quad (3.5.4)$$

где $S_k(\varphi)$ - количество отсчетов цели k -го класса при ракурсе φ .



ЭПР МП = -30дБ



ЭПР МП = -10дБ

Рис. 3.10. Примеры РЛИ ПРЦ

Таблица 3.1

№пп	Разрешение (м)	ЭПР МП (дБ)	Ракурс	Р
1	12	- 30	0°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
			45°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
			90°	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
2	12	- 20	0°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$
			45°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
			90°	$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$
3	12	- 10	0°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
			45°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
			90°	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.65 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$
4	24	- 30	0°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
			45°	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0.1 & 0.85 & 0.05 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
			90°	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$
5	24	- 20	0°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
			45°	$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.85 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$
			90°	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$
6	24	- 10	0°	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$
			45°	$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.3 & 0.65 \end{pmatrix}$
			90°	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.65 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$

4. Все элементы РЛИ, не занятые целью, представляют собой отсчеты фона, который имеет одинаковую удельную ЭПР. Отношение мощностей сигнала от фона и шума - g_{Φ} .

5. Оценка ракурса φ производится после бинарного квантования РЛИ путем измерения параметров прямой, для которой СКО расстояний до точек множества параметров РЛИ НЦ, полученных после бинарного квантования, минимально.

С учетом этих предположений оптимальный алгоритм принимает вид

$$k = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \left(\frac{S_k(\hat{\varphi})}{\xi_k(\hat{\varphi})} - \frac{1}{g_{\Phi}} \right) \sum_{i \in \Omega_k(\hat{\varphi})} \eta_i + S_k(\hat{\varphi}) \ln \frac{\xi_k(\hat{\varphi})}{S_k(\hat{\varphi})g_{\Phi}} \right\} \quad (3.5.5)$$

где - $\Omega_k(\varphi)$ область РЛИ, занимаемая ПРЦ k -го класса при ракурсе $\hat{\varphi}$.

Содержание алгоритма (3.5.5) заключается в следующем.

1. Сформированный кадр РЛИ подвергается бинарному квантованию для отсекающего фона. По полученному множеству точек производится оценка ракурса φ . Порог квантования выставляется по уровню ложной тревоги. Уровень порога подбирается при анализе.

2. В соответствии с априорной информацией о размерах и ЭПР НЦ каждого k -го класса рассчитываются:

- а) размеры области $\Omega_k(\hat{\varphi})$, занимаемой целью k -го класса при ракурсе $\hat{\varphi}$;
- б) число точек $S_k(\hat{\varphi})$, приходящихся на цель k -го класса при ракурсе $\hat{\varphi}$ (число точек, входящих в состав $\Omega_k(\hat{\varphi})$);
- в) ожидаемое значение параметра $\xi_k(\hat{\varphi})$ для k -го класса при ракурсе $(\hat{\varphi})$.

3. Отсчеты РЛИ в пределах области $\Omega_k(\hat{\varphi})$ суммируются.

4. Вычисляется выражение в фигурных скобках формулы (3.5.5) и принимается решение в пользу того класса ПРЦ, для которого полученное выражение минимально.

Высокая эффективность полученного алгоритма (результаты соответствующего анализа обсуждаются ниже) достигается за счет практически полного учета всей доступной и достоверной априорной информации - размеров, конфигурации областей, занимаемых ПРЦ разных классов, их ЭПР при оцененном ракурсе.

В этой связи представляется целесообразным провести сравнительный анализ оптимального алгоритма с рядом других, зависящих от априорной информации в меньшей степени, чем это необходимо для алгоритма (3.5.5).

Перечислим алгоритмы, которые сравнивались с (3.5.5).

$$1. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{\xi} - \xi_k|}{\xi_k} \right\} \quad (3.5.6)$$

$$2. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{S} - S_k|}{S_k} \right\} \quad (3.5.7)$$

$$3. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{\xi} - \xi_k|}{\xi_k} + \frac{|\hat{S} - S_k|}{S_k} \right\} \quad (3.5.8)$$

$$4. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{\xi}(\hat{\varphi}) - \xi_k|}{\xi_k} \right\} \quad (3.5.9)$$

$$5. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{S} - \hat{S}_k(\hat{\varphi})|}{\hat{S}_k(\hat{\varphi})} \right\} \quad (3.5.10)$$

$$6. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{\xi}(\hat{\varphi}) - \xi_k|}{\xi_k} + \frac{|\hat{S} - S_k|}{S_k} \right\} \quad (3.5.11)$$

$$7. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{\xi} - \xi_k|}{\xi_k} + \frac{|\hat{S} - S_k(\hat{\varphi})|}{\hat{S}_k(\hat{\varphi})} \right\} \quad (3.5.12)$$

$$8. \hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{|\hat{\xi}(\hat{\varphi}) - \xi_k|}{\xi_k} + \frac{|\hat{S} - \hat{S}_k(\hat{\varphi})|}{\hat{S}_k(\hat{\varphi})} \right\} \quad (3.5.13)$$

где $\hat{\xi} = \sum_{\eta_i > H} \frac{\eta_i}{\sigma_{\text{III}}^2}$ - оценка суммарной мощности в пределах области РЛИ, где отсчеты η_i

превышают порог H , установленный по уровню мощности фона; $\hat{\xi}(\hat{\varphi}) = \frac{\hat{\xi}}{1 - b(\hat{\varphi})^2}$ - та же оценка, пересчитанная к нулевому ракурсу; S_k - среднее число точек, приходящихся на цель k -го класса; $S_k(\hat{\varphi})$ - число точек, соответствующих цели k -го класса при условии, что ракурс равен $\hat{\varphi}$; \hat{S} - оценка размеров ПРЦ - число отсчетов РЛИ, превысивших порог.

В приведенном перечне алгоритмов простейшими, не использующими оценок ракурса, являются алгоритмы 1-3. Наиболее сложным, учитывающим изменение и ЭПР, и размеров при вариациях ракурса, является алгоритм 8. По существу, он отличается от оптимального лишь тем, что не требует априорного знания области РЛИ, занимаемой ПРЦ каждого класса при всех допустимых ракурсах. Алгоритмы 4-7 занимают промежуточное положение.

Сравнение эффективности перечисленных выше алгоритмов производилось методом статистического моделирования на гипотетических тестовых РЛИ, имеющих разрешающую способность порядка 25м. Мощность фона соответствует подстилающей

поверхности с удельной ЭПР 20дб. Радиолокационные портреты простейших НЦ формировались для 5 опорных ракурсов в пределах от 0 до 90 градусов. Конкретные ракурсы цели задавались случайными, равновероятными. Порог для отсекающего фона устанавливался на уровне, при котором вероятность его превышения отдельным отсчетом фона не превышала 0.01.

Результаты сравнительного анализа выбранных девяти алгоритмов приведены на рис 3.11. По оси абсцисс отложено отношение мощности сигнала, отраженного "малым" ПРЦ, к мощности фона в пределах площади, занимаемой целью. Общее количество распознаваемых классов равно 3, причем цели разных классов отличаются по ЭПР на 3дб, а по площади на 50%.

Как следует из полученных результатов, основной алгоритм (3.5.5) обладает существенно более высокой эффективностью. Следующую по качеству группу алгоритмов занимают те, которые используют адаптивную оценку ракурса для выбора интегральной ЭПР каждого класса целей, соответствующей оцененному ракурсу. И, наконец, наименее эффективны алгоритмы, использующие различия в размерах, но пренебрегающие информацией о различиях в ЭПР различных классов ПРЦ.

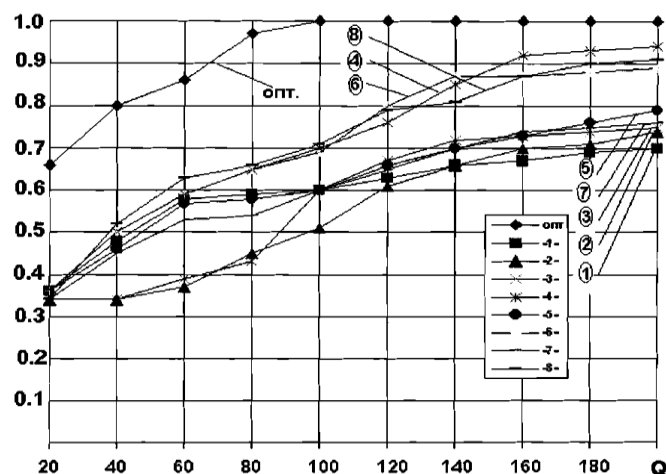


Рис. 3.11. Сравнение алгоритмов классификации

3.6. Комплексное распознавание. Классификация ПРЦ по данным нескольких средств наблюдения

Применение оптимальных и близких к ним алгоритмов классификации, использование самых различных признаков в самых разных комбинациях тем не менее не гарантируют требуемой эффективности классификации ПРЦ по одному выборочному РЛИ в связи с его искажениями, вызванными, в первую очередь, априорной неопределенностью относительно закона движения ПРЦ относительно своего центра масс в момент визирования. В этом случае повышение вероятности правильной классификации

может быть обеспечено при совместном использовании данных, полученных, в общем случае, принципиально разными средствами наблюдения: радиолокационными, радиотехническими, оптическими, радиометрическими и т.п. или одинаковыми средствами в разное время. В этом случае встает вопрос об оптимальном использовании совокупности всех данных для принятия решения о классе ПРЦ; разработке соответствующих алгоритмов и анализе их эффективности.

3.6.1. Процедуры комплексной классификации

Алгоритм комплексной классификации может строиться на основе двух принципов:

- объединение признаков;
- объединение решений.

В первом случае от различных средств наблюдения (СН) в центральный пункт (ЦП) обработки поступают значения признаков, например, данные радиолокационной разведки (РЛР) - отсчеты РЛИ или функции от них; данные радиотехнической разведки (РТР) – параметры разведанных сигналов - мощность, частота, длительность импульсов, период их следования и т.д.; данные радиоразведки (РР) - вид и глубина модуляции РР. Собственно процедура классификации носит в этом случае традиционный характер: создание базы данных на основе обучающих выборок и принятие решения с помощью канонических параметрических или непараметрических правил. При достаточных временных и вычислительных ресурсах такое решение задачи классификации обеспечивает достоверность, близкую к оптимальной. Однако, названному методу присущ ряд недостатков, а именно:

- чрезвычайно высокие требования к объему памяти и быстродействию процессоров обработки;
- повышенные требования к количеству и качеству информации, передаваемой по каналам связи;
- необходимость комплексного функционального изменения алгоритмов обработки информации и технических устройств их реализации на существующих и разрабатываемых средствах наблюдения, что связано с существенными организационными и финансовыми затратами.

Указанные соображения позволяют высказать уверенность в целесообразности комплексирования информации на уровне объединения решений, когда исходными

сведениями для ЦП являются частные решения о классах наблюдаемых ПРЦ, вынесенные отдельными средствами наблюдения.

Следует отметить, что между рассматриваемыми полярными случаями возможны промежуточные варианты. Так, например, отдельное средство наблюдения может не выносить окончательного решения, но формировать ограниченное число интегральных, наиболее значимых информативных признаков и передавать их по каналу связи на ЦП, где и принимается решение по совокупности всех принятых признаков, а не только частных решений индивидуальных средств наблюдения. Другим вариантом может быть принятие частного решения каждым СН, но число таких решений в каждом средстве наблюдения не ограничивается числом классов ПРЦ, но и содержит набор промежуточных подклассов, включающих оценку ракурса и некоторых других параметров, характеризующих рыскание, качку и т.д.

Распространенной процедурой принятия решения на ЦП является правило взвешенного суммирования. Названное правило является оптимальным с позиций теории статистических решений при независимости принятых решений о классе ПРЦ отдельными СН. Содержание правила взвешенного суммирования заключается в следующем. При поступлении в ЦП решения 1-го источника информации ($l=\overline{1, L}$) в пользу i -го класса для каждого j -го класса ($i, j = \overline{1, M}$) вычисляется коэффициент, равный:

$$V_{jl} = C_{ijl}; C_{ijl} = A \lg \frac{P_{ijl}}{P_{il}}, \quad (3.6.1)$$

$$\text{где } P_{il} = \min_j P_{ijl}; A^{-1} = \max_{i,j,l} \lg \left(\frac{P_{ijl}}{P_{il}} \right),$$

где P_{ijl} = вероятность вынесения решения в пользу i -го класса 1-м источником при фактическом наличии ПРЦ j -го класса. Полученные коэффициенты суммируются

$$V_j = \sum_{l=1}^L V_{jl}; j = \overline{1, M}$$

и принимается решение в пользу класса, для которого величина V_j максимальна.

Рассмотрим некоторые упрощения алгоритма взвешенного суммирования. Прежде всего проанализируем ситуацию, когда вероятности правильных и ошибочных решений одинаковы для разных СН:

$$P_{ji1} = P_{ji2} = \dots = P_{jiL} = P_0$$

$$P_{ij1} = P_{ij2} = \dots = P_{ijL} = \frac{1-P_0}{M-1}; 1 \neq j; 1, j = \overline{1, M}$$

В этом случае реализуется процедура "простого голосования", когда решение принимается в пользу того класса, за который "голосует" большинство СН. Названная процедура является оптимальной, если:

- источники информации статистически независимы;
- достоверность источников одинакова;
- вероятности ошибочных решений одинаковы.

Простое голосование представляет собой достаточно эффективную процедуру принятия коллективного решения, если достоверности источников мало отличаются между собой. Если такое различие существенно, то правило простого голосования может приводить к ухудшению достоверности при комплексировании. Этот недостаток обсуждаемого правила заключается в том, что игнорируются различия в достоверности работы различных источников, уравнивается их влияние на конечный результат, что может привести к существенному снижению эффективности коллективного распознавания, например, при наличии одного СН с очень высокой достоверностью ($P_{il} \approx 1$) и нескольких СН с низкой ($P_{il} \neq 1$) при простом голосовании верное решение "хорошего" СН "затеряется" среди множества решений СН с низкой эффективностью.

От этого недостатка свободно правило взвешенного голосования, которое реализуется при выполнении следующего условия:

$$P_{ijl} = \frac{1-P_{ijl}}{M-1}; i \neq j; i, j = \overline{1, M}.$$

При этом каждому "голосу" приписывается свой "вес":

$$C_{ijl} = A \lg \frac{P_{ijl}}{P_{ijl}}; C_{ijl} = 0.$$

Эта процедура является оптимальной при соблюдении первого и третьего условий правила простого голосования. Взвешенное голосование практически не уступает оптимальному правилу принятия решения, если вероятности ошибочных решений мало отличаются между собой. При невыполнении последнего условия следует использовать правило взвешенного суммирования, которое при вынесении частного решения СН приписывает свой вес не только выбранному, но и всем остальным классам. При всех достоинствах оптимального голосования ему присущ недостаток, связанный с требованием указать значения вероятностей P_{ijl} ошибочных решений в пользу 1-го класса при наличии НК j -го класса в 1-м СН. Априорное знание таких, вероятностей может быть весьма проблематичным особенно на начальных этапах функционирования системы коллективного распознавания.

3.6.2. Анализ эффективности классификации

С целью получения самых общих представлений о повышении эффективности классификации ПРЦ за счет комплексирования данных от разных средств наблюдения рассмотрим зависимость вероятности правильного распознавания (ВПР) всей системы в целом (P_ε) от ВПР одного СН (P_p) при разном количестве источников информации L . В частности, на рис.3.12 приведена названная зависимость для алгоритма простого голосования. Из рисунка следует, что для получения итоговой вероятности $P_\varepsilon > 0.9$ при наличии 6 независимых средств наблюдения частная вероятность правильной классификации каждым СН должна быть не менее 0.7. (Вывод соответствующей методики расчета приведен в Приложении).

В некоторых случаях, проиллюстрированных в [121], процедуры простого голосования снижают итоговую ВПР. Так, например, при объединении трех СН, из которых два имеют ВПР, равную 0.4, а один – 0.9 при простом голосовании $P_\varepsilon < 0.7$, а при взвешенном больше 0.9.

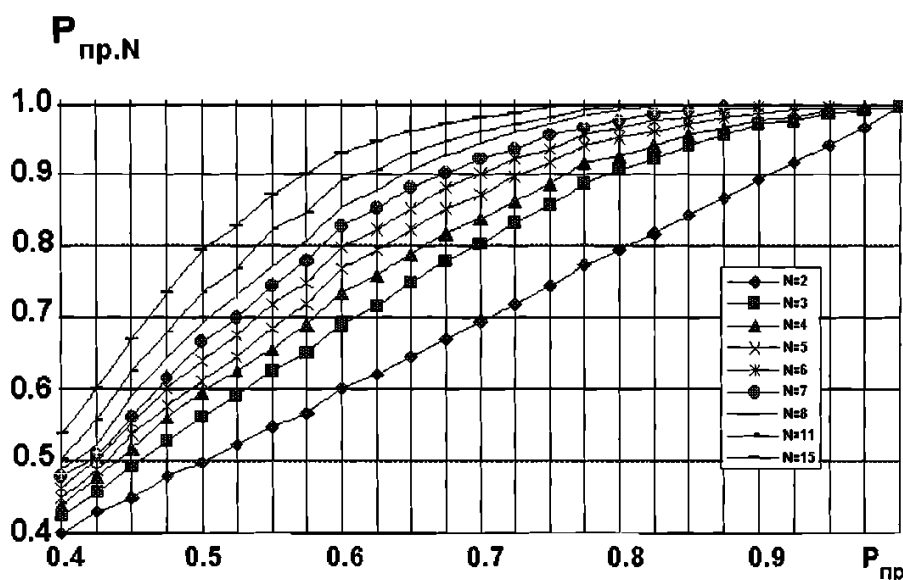


Рис.3.12. Зависимости вероятности правильного распознавания при простом голосовании от вероятности правильного распознавания при принятии решения по одному наблюдению

Конкретный пример применения алгоритма коллективного распознавания рассмотрим для ситуации объединения данных радиолокационной и радиотехнической разведки. Предположим, что классификатор располагает следующими источниками информации.

1. Станция РТР, определяющая класс ПРЦ по параметрам частотной модуляции принимаемого сигнала, вызванной килевой и бортовой качками ПРЦ при использовании электронной стабилизации луча РЛС.

2. РЛС с синтезированной апертурой, определяющая класс ПРЦ по его радиолокационному изображению. Причем сведения о классе ПРЦ, формируемые РСА могут быть получены неоднократно на разных витках орбиты носителя РСА. Эти сведения считаются статистически независимыми.

Эффективность каждого СН оценивается матрицей вероятностей правильных и ошибочных решений.

$$P = \begin{pmatrix} P_{A/A} & P_{K/A} & P_{Э/A} \\ P_{A/K} & P_{K/K} & P_{Э/K} \\ P_{A/Э} & P_{K/Э} & P_{Э/Э} \end{pmatrix}$$

Цифровое моделирование алгоритма классификации по данным средств РТР, описанное и исследованное в [107], для одной из возможных практических ситуаций, позволило получить следующую матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.12 & 0.0 \\ 0.15 & 0.78 & 0.07 \\ 0.0 & 0.28 & 0.72 \end{pmatrix}$$

Для второго из используемых средств наблюдения – РСА. Выделим две типовых ситуации, исследованных методом статистического моделирования при использовании в качестве прототипа тактико-технических характеристик космического аппарата SEASAT. При высокой эффективности (отношение сигнал/шум на выходе линейной части приемника составляет величину порядка 20 дБ) оценка матрицы вероятностей правильной и ошибочной классификации была получена в следующем виде:

$$P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.03 & 0.85 & 0.12 \\ 0.00 & 0.09 & 0.91 \end{pmatrix}$$

При низком отношении сигнал/шум (порядка 14 дБ) оценка матрицы имеет вид:

$$P_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.22 & 0.13 \\ 0.18 & 0.49 & 0.33 \\ 0.10 & 0.27 & 0.63 \end{pmatrix}$$

Используя приведенные данные о достоверности различных СН моделировались разные ситуации коллективного распознавания. Предполагалось, что от каждого источника поступает информация о номере выбранного класса. Сравнивались, два правила принятия решения: простое голосование и взвешенное суммирование, причем при взвешенном суммировании матрицы вероятностей, описывающие эффективность

различных средств наблюдения, предполагались известными. Результаты моделирования сведены в таблица 3.2. В первом ее столбце приведены обозначения матриц, вероятностей используемых источников. Цифра перед матрицей указывает на число независимых СН (при моделировании изменялось количество решений, принимаемых на основе РСА).

Из анализа результатов моделирования можно сделать следующие выводы. Если имеются два источника информации с разными матрицами вероятностей верных и ошибочных решений, то при простом голосовании итоговая матрица оказывается "средней" между исходными матрицами. При взвешенном суммировании итоговая матрица будет, по крайней мере, не хуже, чем любая из исходных. При простом голосовании вероятность ошибки с ростом числа "плохих" источников информации может даже увеличиваться, если в коллективе распознающих автоматов наряду с источником, обладающим высокой достоверностью, присутствуют "плохие" СН, имеющие низкую эффективность классификации.

Правило взвешенного суммирования при тех же условиях обеспечивает гарантированный выигрыш по отношению к самому "хорошему" средству наблюдения, используемому вне коллектива решающих правил. Платой за такой выигрыш является априорное знание достоверности классификации ПРЦ каждым средством наблюдения.

Таблица 3.2

Комбинация СН	Простое голосование	Взвешенное суммирование
$P_1, 1P_2^{(1)}$	0.91 0.08 0.01 0.09 0.82 0.09 0.00 0.18 0.82	0.95 0.05 0.00 0.03 0.81 0.16 0.00 0.03 0.97
$P_1, 2P_2^{(1)}$	0.99 0.01 0.00 0.02 0.94 0.04 0.00 0.05 0.95	0.99 0.01 0.00 0.01 0.95 0.03 0.00 0.05 0.95
$P_1, 6P_2^{(2)}$	0.91 0.07 0.02 0.07 0.72 0.21 0.01 0.14 0.85	0.94 0.06 0.00 0.05 0.82 0.13 0.00 0.13 0.87
$P_1, 10P_2^{(2)}$	0.94 0.05 0.01 0.05 0.75 0.20 0.00 0.10 0.90	0.97 0.03 0.00 0.04 0.89 0.07 0.00 0.13 0.87
$P_1, 14P_2^{(2)}$	0.98 0.02 0.00 0.03 0.78 0.19 0.00 0.06 0.94	0.98 0.02 0.00 0.02 0.91 0.07 0.00 0.07 0.93

Названные сведения не могут быть получены иначе, чем в результате оценки эффективности каждого классификатора либо по рабочим, либо экспериментальным, либо моделируемым выборкам наблюдаемых данных.

3.7. Методика расчета вероятности правильного распознавания при объединении решений отдельных СН методом простого голосования

Рассмотрим задачу расчета матрицы вероятностей правильных и ошибочных решений при условии, что частные решения выносятся одинаковыми средствами наблюдения методом простого голосования. Число объединяемых решений P . Априорные вероятности P_j наблюдения каждого типа ПРЦ известны. Число классов, как и в предыдущих случаях, равно трем. Предположим, что в пользу j -го класса принято n_j частных решений. Общее число объединяемых решений - N . Тогда вероятность возникновения конкретной ситуации совмещения n_1, n_2 и $n_3 = N - (n_1 + n_2)$ частных решений при наблюдении цели 1-го класса равна

$$C_N^{n_1} C_{N-n_1}^{n_2} P_{1j}^{n_1} P_{2j}^{n_2} P_{3j}^{N-n_1-n_2}$$

Следует заметить, что при использовании простого голосования могут возникнуть конфликтные ситуации, когда справедливо одно из следующих условий

$$n_1 = n_2 > n_3$$

$$n_1 = n_3 > n_2$$

(3.7.1)

$$n_2 = n_3 > n_1$$

или

$$n_1 = n_2 = n_3 = N/3$$

(3.7.2)

Предположим, что разрешение конфликтных ситуаций производится случайным образом. При этом в ситуациях (3.7.1) конфликт между j -м и r -м классами разрешается в пользу j -го класса с вероятностями $P_{k2}(j/r)$, которые представлены в виде матрицы:

$$P_{k2} = \begin{pmatrix} 0 & P_{k2}(1/2) & P_{k2}(1/3) \\ P_{k2}(2/1) & 0 & P_{k2}(2/3) \\ P_{k2}(3/1) & P_{k2}(3/2) & 0 \end{pmatrix}$$

для элементов которой справедливо условие

$$P_{k2}(j/r) + P_{k2}(r/j) = 1 \text{ при } j \neq r$$

Конфликтные ситуации типа (3.7.1) с вероятностью $P_{k2}(j)$ разрешаются в пользу j -го класса. При этом справедливо равенство

$$P_{k3}(1) + P_{k3}(2) + P_{k3}(3) = 1$$

Используя введенные предположения, для вероятности вынесения итогового решения в пользу j -го класса при наблюдении цели i -го класса можно воспользоваться выражением: $P_N(j/i) = \sum_{n_j=0}^N \sum_{n_r=0}^{N-n_j} C_N^{n_j} C_{N-n_j}^{n_r} P_{ji}^{n_j} P_{ri}^{n_r} P_{qi}^{N-n_j-n_r} * A(N, n_j, n_r)$, где $r \neq j, r \neq q, q \neq j$.

Коэффициент $A(N, n_j, n_r)$ принимает следующие значения:

$$A(N, n_j, n_r) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{если } n_j < n_r \quad \text{или } n_j < \frac{N - n_r}{2} \\ 1 & \text{если } n_j > n_r \quad \text{и } n_j > \frac{(N - n_r)}{2} \\ P_{k2} \left(\frac{j}{r} \right) & \text{если } n_j = n_r \\ P_{k2} \left(\frac{j}{q} \right) & \text{если } n_j = \frac{N - n_r}{2} \quad \text{и } n_j > \frac{N}{3} \\ P_{k3}(j) & \text{если } n_j = n_r = \frac{N}{3} \quad \text{и } n_j > n_r \end{array} \right\}$$

Вероятность правильного распознавания ПРЦ на основе частных решений определяется в соответствии с выражением

$$P_{\text{пр.}N} = \sum_{i=1}^3 P_i P_N \left(\frac{1}{i} \right).$$

Литература к главе 3

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: в 3т. / Г. Ван Трис. М.: Сов. радио, 1972. т.1. 744с.
1. Растрингин Л.А. Метод коллективного распознавания / Л.А.Растрингин, Р.Х.Эринштейн. М.: Энергоиздат, 1981. 80с.
2. Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение / Н.Г. Загоруйко. М.: Сов. Радио 1972. 206с.
3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 832с.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3 т. Т. 3. / Г. Ван Трис. М.: Сов. радио. 1977. т. 3. 664с.
5. Терраин Ч.У. Алгоритмы анализа изображений, основанные на статистических моделях / Ч.У. Терраин, Т.Ф. Куатьери, Д.Е. Даржон. ТИИЭР. 1986. т.72. N 4. с.4-26.
6. Л.Г. Доросинский Использование граничных соотношений Кайлата для оценки эффективности классификации сигналов. 24-я Международная Крымская конференция "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии", Севастополь, 7-13 сентября 2014г

4. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЛИ

Реализация оптимального и близких к нему по эффективности подоптимальных алгоритмов практически неосуществима без решения ряда дополнительных задач. Среди которых наиболее важными являются следующие.

Оценка центра РЛИ ПРЦ в пределах сформированного кадра.

Оценка области РЛИ, занимаемой радиолокационным изображением ПРЦ.

Оценка ракурса (пространственной ориентации ПРЦ относительно траектории космического аппарата).

Названные задачи рассмотрены в данной главе.

4.1 Измерение общегрупповых параметров распределенной цели.

Измерение координат центра РЛИ

При решении задачи классификации, сопровождения траектории движения ордера ПРЦ или отдельной цели неизбежно возникает задача определения ряда общегрупповых параметров, таких как координата центра ордера (центра РЛИ ПРЦ), количество целей в составе ордера ("блестящих точек" в составе ПРЦ), размеры ордера (размеры РЛИ ПРЦ), скорость и направление движения, ракурс и т.п.

Отличие методов решения задачи измерения параметров движения одиночного ПРЦ или ордера в целом имеет не принципиальный, а количественный характер, поскольку как в одном, так и в другом случаях наблюдаемые данные представляют собой совокупность двумерных отсчетов, характеризующих распределение мощности отраженного сигнала по координатам плоскости, занимаемой ордером ПРЦ (при относительно низком разрешении) или отдельно взятым объектом (в случае высокой разрешающей способности). Отличие процедур измерения общегрупповых параметров определяется по существу размерами области наблюдения: локальная область, сравнимая по размерам с РЛИ ПРЦ, или радиолокационное изображение области акватории, в пределах которой находится наблюдаемый ордер. В связи с названными соображениями теоретическая часть синтеза и анализа проблемы определения общегрупповых параметров излагается в общем виде без конкретизации тактической задачи.

4.1.1. Синтез оптимального измерителя общегруппового параметра групповой цели

В настоящем разделе рассмотрено решение задачи оптимального измерения координаты общегруппового центра распределенной цели. Вся доступная информация о пространственном положении цели содержится в апостериорной плотности вероятности

$P(\bar{x}_{\Pi}; \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n; n)$, где \bar{x}_{Π} - координата общегруппового центра цели, n - число отсчетов полученного РЛИ, $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ - пространственные координаты отдельных элементов группы относительно общегруппового центра.

Определяющее значение для решения задачи синтеза устройства оценки общегруппового центра имеет апостериорная плотность вероятности

$$P(x_{\Pi}) = \langle P(x_{\Pi}; n; x_1 \dots x_n) \rangle_{n, \bar{x}}, \quad (4.1.1)$$

поскольку принятие решения заключается в определении какого-либо параметра названной плотности (математического ожидания, моды и т.д.), выбор которого зависит от принятого критерия (минимум среднеквадратической ошибки, максимум апостериорной вероятности и т.п.).

В выражении (4.1.1) усреднение производится по всем возможным значениям как числа элементов цели, так и комбинациям их пространственных координат.

При заданной априорной вероятности $P(\bar{x}_{\Pi})$ и коэффициенте правдоподобия $\Delta(\bar{U}/\bar{x}_{\Pi})$ выражение апостериорной плотности вероятностей определяется по формуле Байеса

$$P(\bar{x}_{\Pi}) = CP(\bar{x}_{\Pi})\bar{\Delta}(\bar{U}/\bar{x}_{\Pi}), \quad (4.1.2)$$

где \bar{U} - вектор комплексных амплитуд наблюдаемых данных.

Коэффициент правдоподобия в формуле (4.1.2) определяется статистическим усреднением частного коэффициента правдоподобия $\Delta(\bar{U}/\bar{x}_{\Pi}; x_1, x_2, \dots, x_n)$, записанного в предположении, что координаты элементов цели известны и фиксированы, по всем возможным значениям вектора $\bar{x}_n = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ координат отдельных точек ПРЦ

$$\bar{\Delta}(\bar{U}/\bar{x}_{\Pi}) = \langle \Delta(\bar{U}/\bar{x}_{\Pi}; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \rangle_{\bar{x}_n}. \quad (4.1.3)$$

Усреднение в (4.1.3) производится по плотностям вероятности

$$\pi_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n; \Omega/\bar{x}_{\Pi}), \quad (4.1.4)$$

содержание которых заключается в следующем. Вероятность ΔP_n нахождения в области пространства Ω , занятой целью, ровно n целей, координаты которых попали в интервалы

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_1 + \bar{\Delta}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{x}_n + \bar{\Delta}_n)$$

при условии, что координата центра цели \bar{x}_{Π} , с точностью до величин второго порядка малости относительно $\bar{\Delta} = \max_{1 \leq j \leq n} \bar{x}_j$, выражаются в виде

$$\Delta P_n = \pi_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n; \Omega) \bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_n [1 + o(\bar{\Delta})]. \quad (4.1.5)$$

При сделанных предположениях операция усреднения (4.1.3) может быть конкретизирована следующим образом:

$$\Delta[\bar{U}/\bar{x}_{\Pi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(n)} \Delta_n(\bar{x}_n) \pi(\bar{x}_n/x_{\Pi}) d\bar{x}_n. \quad (4.1.6)$$

Индекс (n) под интегралом указывает на его кратность, причем область интегрирования равна Ω -интервалу возможных координат элементов цели.

Если сигналы разрешены по каждой из своих координат, то справедливо выражение:

$$\Delta_n(\bar{x}_n) = \prod_{i=1}^n \Delta_1(\bar{U}, \bar{x}_i) \quad (4.1.7)$$

и, следовательно, для (4.1.6) можно записать:

$$\Delta[U/x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(n)} \left\{ \prod_{i=1}^n \Delta_1(\bar{U}, \bar{x}_i) \right\} \pi_n(\bar{x}_n/\bar{x}_{\Pi}), \quad (4.1.8)$$

где $\Delta_1(\bar{U}, \bar{x}_i)$ - коэффициент правдоподобия для цели, состоящей из одного элементарного отражателя с пространственной координатой \bar{x}_i .

В соответствии с методикой [1] более удобной по сравнению с (4.1.4) вероятностной характеристикой для задания расположения элементов ПРЦ может служить производящий функционал

$$L(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(n)} \pi\left(\frac{\bar{x}_n}{\bar{x}_{\Pi}}\right) \prod_{i=1}^n [u(\bar{x}_i) + 1] d\bar{x}_n. \quad (4.1.9)$$

Производящий функционал (4.1.9) позволяет выразить апостериорные характеристики многоэлементной цели в более компактной форме для ряда важных случаев. Это, в первую очередь относится к тем статистическим ситуациям, когда: цели разрешены по всем координатам, а априорные координаты отдельных элементов групповой цели представляют собой поток Пуассона или Бернулли.

Во избежание громоздких выкладок в дальнейшем подробно рассмотрим задачу в одномерном варианте, а именно, определим алгоритм оценки одной координаты общегруппового параметра цели (центра ПРЦ) и оценим его эффективность для ряда важных практических приложений. Такой подход по существу не снижает общности основных выводов и рекомендаций существенно упрощая решение задачи синтеза и анализа.

Сравнивая выражения (4.1.8) и (4.1.9), нетрудно установить следующее соотношение:

$$\Delta\left[\frac{\bar{U}}{x_{\Pi}}\right] = L\left[\Delta_1(u) - \frac{1}{x_{\Pi}}\right]. \quad (4.1.10)$$

Априорная информация о координатах отдельных элементов групповой цели задается ниже в двух вариантах:

- а) координаты отдельных целей представляют собой поток Пуассона;
- б) координаты отдельных целей аппроксимируются потоком Бернулли.

Для потока Пуассона производящий функционал получен в [2]:

$$L[u] = \exp \left\{ \int_{\Omega} \beta(x) u(x) dx \right\}, \quad (4.1.11)$$

где $\beta(x)$ - интенсивность пуассоновского потока, заданная как функция от координаты цели.

Сравнение выражений (4.1.11) и (4.1.10) позволяет непосредственно получить выражение для усредненного коэффициента правдоподобия при моделировании отсчетов РЛИ ПРЦ пуассоновским потоком

$$\Delta[\bar{U}/x_{Ц}] = \exp \left\{ \int_{\Omega} \beta(x/x_{Ц}) [\Delta_1(\bar{U}, x) - 1] dx \right\} \quad (4.1.12)$$

Принятое для интенсивности потока обозначение $\beta(x/x_{Ц})$ подчеркивает зависимость интенсивности от измеряемого параметра - координаты центра сложной цели $x_{Ц}$.

Для другого частного случая, когда поток координат элементов поверхности РЛИ ПРЦ аппроксимирован потоком Бернулли, выражение производящего функционала имеет вид:

$$L[u] = \prod_{j=1}^k \left[1 + \int_{\Omega} u(x) e_j(x) dx \right], \quad (4.1.13)$$

где k - максимальное число отдельных элементов групповой цели (число элементов разрешения, приходящихся на цель максимально возможных размеров).

$e_j(x)$ - парциальная плотность вероятности наличия отражающего элемента на j -й позиции (с номером j), не обязательно нормированная к единице, то есть

$$\int_{\Omega} e_j(x) dx = v_j \leq 1, \quad (4.1.14)$$

что допускает отсутствие отражающего элемента цели в j -м элементе разрешения с вероятностью

$$\mu_j = 1 - v_j. \quad (4.1.15)$$

Сравнение выражений (4.1.10) и (4.1.13) позволяет получить коэффициент правдоподобия

$$\Delta[\bar{U}/x_{Ц}] = \prod_{j=1}^k \left[1 + \int_{\Omega} e_j(x/x_{Ц}) [\Delta_1(\bar{U}, x_{Ц}) - 1] dx \right]. \quad (4.1.16)$$

С учетом (4.1.14) и (4.1.15) последнее выражение может быть записано в следующем виде

$$\Delta[\bar{U}/x_{Ц}] = \prod_{j=1}^k \left[\mu_j(x) + \int_{\Omega} e_j(x/x_{Ц}) \Delta_1(\bar{U}, x) dx \right]. \quad (4.1.17)$$

В тех случаях, когда решение принимается по критерию максимума апостериорной плотности вероятности, оценка координаты центра цели находится из выражения

$$\hat{x}_{Ц} = \operatorname{argmax} \left\{ \ln P(x_{Ц}) + \ln \Delta \left[\frac{\bar{U}}{x_{Ц}} \right] \right\} \quad (4.1.18)$$

и определяется формулами:

для пуассоновского потока

$$\hat{x}_{Ц} = \operatorname{argmax} \left\{ \ln P(x_{Ц}) + \int_{\Omega} \beta(x/x_{Ц}) [\Delta(\bar{U}, x) - 1] dx \right\}, \quad (4.1.19)$$

для потока Бернулли

$$x_{Ц} = \operatorname{argmax} \left\{ \ln P(x_{Ц}) + \sum_{j=1}^k \ln \left[\mu_j(x) + \int_{\Omega} e_j(x/x_{Ц}) \Delta_1(\bar{U}, x) dx \right] \right\}. \quad (4.1.20)$$

Соответствующие схемы изображены на рис.4.1 и на рис.4.2.

Как в том, так и другом случае основная функциональная операция состоит в обобщении данных оптимальных приемников первичной обработки (интегрировании по ожидаемой протяженности цели с весами, определяемыми априорным изменением интенсивности потока с соответствующим «загрублением» разрешающей способности).

Таким образом, для построения классического байесовского измерителя необходимо априорное знание интенсивности потока $\beta(x/x_{Ц})$ или парциальных плотностей $e(x)$, которые должны рассчитываться, исходя из принятых моделей отдельных ПРЦ и/или тактики построения.

4.1.2. Анализ эффективности алгоритма измерения координаты центра ПРЦ

Оценка максимума апостериорной вероятности образуется путем выбора канала формирования $\hat{P}(x_{Ц})$, в котором апостериорная плотность вероятности принимает максимальное значение. В частности, если известно приближение $x_{Ц}'$ к истинному

значению $x_{Ц}$, отстоящее от последнего меньше, чем на величину апостериорного среднеквадратичного разброса, удобно аппроксимировать $\ln \dot{P}(x'_{Ц})$ квадратичным разложением относительно точки $x'_{Ц}$:

$$\ln \dot{P}(x_{Ц}) \cong \ln \dot{P}(x'_{Ц}) + \frac{d \ln \dot{P}(x'_{Ц})}{dx_{Ц}}(x - x'_{Ц}) + \frac{d^2 \ln \dot{P}(x'_{Ц})}{dx_{Ц}^2}(x - x_{Ц})^2. \quad (4.1.21)$$

После дифференцирования по $x_{Ц}$ получаем решение уравнение правдоподобия

$$\hat{x}_{Ц} = x'_{Ц} - \frac{\frac{d}{dx_{Ц}} \ln \dot{P}_1(x'_{Ц})}{\frac{d^2}{dx_{Ц}^2} \ln \dot{P}_1(x'_{Ц})} \quad (4.1.22)$$

При относительно невысокой априорной точности, когда априорное распределение практически неизменно в окрестности пика коэффициента правдоподобия $\Delta[\bar{U}/x_{Ц}]$, переходим к оценкам максимального правдоподобия. При этом дисперсия оценки определяется соотношением

$$\sigma_{x_{Ц}}^2 = -M \left\{ \left[\frac{d \ln \dot{P}(U/x_{Ц})}{dx_{Ц}} \right] \right\}. \quad (4.1.23)$$

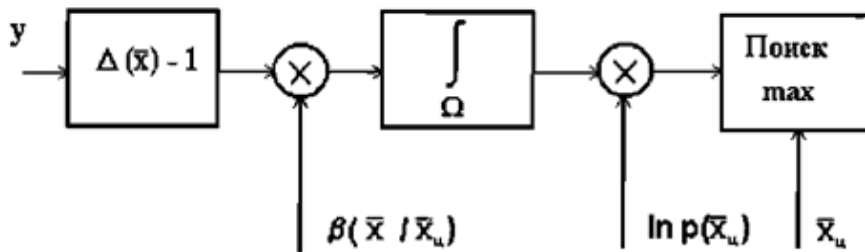


Рис. 4.1. Блок-схема измерителя координаты центра (поток Пуассона)

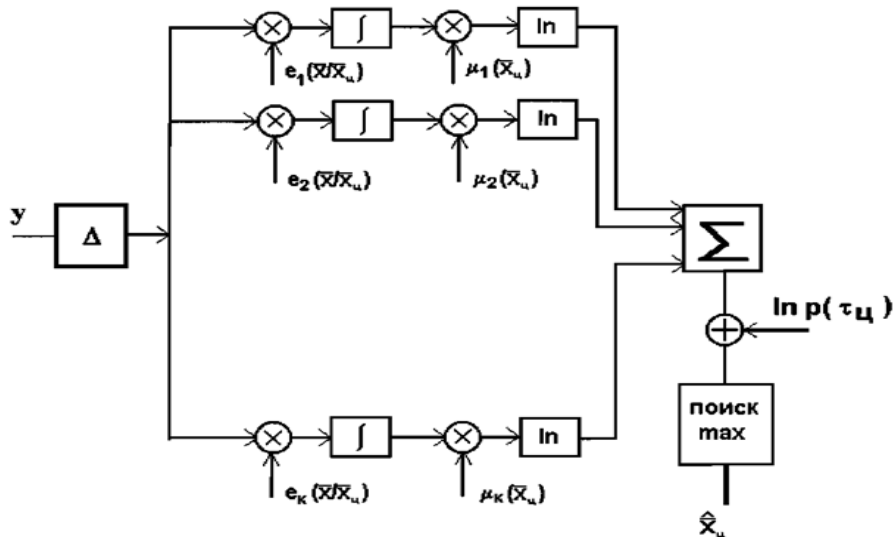


Рис. 4.2. Блок-схема измерителя координаты центра (поток Бернулли)

Применяя известную методику расчета дисперсии оценки [1], при аппроксимации последовательности отметок от цели пуассоновским потоком получим для нее следующее выражение:

$$\sigma_{x_{ц}}^{-2} = 2 \iint_{\Omega} \beta'(x_1/x_{ц}) \beta'(x_2/x_{ц}) \sqrt{q(x_1)q(x_2)} \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (4.1.24)$$

где $q(x)$ - отношение сигнал/шум, заданное как функция от координат цели,

$\psi(x_1, x_2)$ - функция неопределенности, определяемая в соответствии с соотношением (3.3.19).

Дальнейшую конкретизацию выражения (4.1.24) проведем при следующих предположениях:

1) отношение сигнал/шум не зависит от координат цели, а необходимые энергетические соотношения учтены при определении интенсивности потока $\beta(x)$, которая, в свою очередь, представляет собой симметричную функцию;

2) оцениваемый общегрупповой параметр $x_{ц}$ представляет собой координату центра интенсивности $\beta(x)$.

Для получения простых выражений, позволяющих произвести предварительную оценку эффективности определения общегруппового центра цели рассмотрим два частных случая.

1. При достаточно высоком разрешении воспользуемся аппроксимацией функции неопределенности

$$\psi(x_1, x_2) = \Delta_{\varphi} \delta(x_1 - x_2). \quad (4.1.25)$$

Тогда,

$$\sigma_{x_{\Pi}}^{-2} = 2\Delta\psi \int_{\Omega} [\beta'(x - x_{\Pi})]^2 q(x) dx. \quad (4.1.26)$$

При постоянном значении отношения сигнал/шум: $p = const$

$$\sigma_{x_{\Pi}}^2 = \frac{\Delta_{\beta 1}^2}{2q_{3\Phi\Phi}}, \quad (4.1.27)$$

где

$$\Delta_{\beta 1} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \beta^2(x - x_{\Pi}) dx}}{\int_{\Omega} [\beta'(x - x_{\Pi})]^2 dx} \quad (4.1.28)$$

– эффективная протяженность групповой цели,

$$q_{3\Phi\Phi} = q\Delta_{\Phi} \int_{\Omega} \beta^2(x - x_{\Pi}) dx \quad (4.1.29)$$

– эффективное общегрупповое отношение сигнал/шум.

2. В этом примере используем гауссовские функции для аппроксимации интенсивности потока и сигнальной функции (при вычислении функции неопределенности):

$$\beta(x) = L \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta_{\beta 1}^2}\right], \quad (4.1.30)$$

$$u(x) = M \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta_u^2}\right], \quad (4.1.31)$$

где коэффициенты L и M определяются из условий нормировки:

$$\int_{\Omega} \beta(x) dx = \langle n \rangle, \quad (4.1.32)$$

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx = 1, \quad (4.1.33)$$

После подстановки последних выражений в (4.1.24) получим:

$$\sigma_{x_{\Pi}}^2 = \frac{\Delta_{\beta 1}^2}{2p\langle n \rangle^2} \frac{\left[1 + \left(\frac{\Delta_{\beta 1}}{\Delta_u}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{\Delta_{\beta 1}}{\Delta_u}\right)^2} \quad (4.1.34)$$

Минимум дисперсии оценки достигается при условии $\frac{\Delta_{\beta 1}}{\Delta_u} = \sqrt{2}$ и равен

$$\sigma_{x_{\Pi}}^2 = 2.6 \frac{\Delta_{\beta 1}^2}{2q\langle n \rangle^2} \quad (4.1.35)$$

Несмотря на частный характер последних соотношений, можно сделать вывод достаточно общего характера: при определении центра группы мало связанных между собой слабых сигналов целесообразно иметь средство наблюдения с разрешающей

способностью, сравнимой по размерам с эффективным размером группы. В практически важных случаях, связанных с классификацией ПРЦ, когда требуемая разрешающая способность существенно выше, оптимальный алгоритм определения центра формирует "стробы", "загрубляющие" разрешение до требуемой величины.

При использовании для моделирования отсчетов сигнала от цели в виде потока Бернулли для дисперсии оценки координаты центра получим аналогичное выражение

$$\sigma_{x_{\text{ц}}}^{-2} = 2 \sum_{j=1}^k \iint_{\Omega} e'_j(x_1/x_{\text{ц}}) e'_j(x_2/x_{\text{ц}}) \sqrt{q(x_1)q(x_2)} \Psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (4.1.36)$$

Предположим, что внутригрупповые сигналы могут находиться только на вполне определенных позициях, то есть:

$$e_j\left(\frac{x}{x_{\text{ц}}}\right) = v_j \delta(x - \Delta_j - x_{\text{ц}}) \quad (4.1.37)$$

и считая $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1 - x_2)$, получим:

$$\sigma_{x_{\text{ц}}}^{-2} = \sum_{j=1}^k v_j^2 \frac{2q_j}{\Delta_{\text{ф}}}, \quad (4.1.38)$$

где $\Delta_{\text{ф}}$ - ширина интервала разрешения,

q_j - отношение сигнал/шум в j -м интервале разрешения.

Формула (4.1.38) отражает в основном те же качественные особенности измерения общегруппового центра, что и при использовании потока Пуассона. Точность растет при увеличении отношения сигнал/шум и среднего числа элементарных целей. В то же время дисперсия увеличивается при увеличении числа элементов разрешения, приходящихся на размер групповой цели (при увеличении отношения протяженности цели к величине элемента разрешения).

4.2. Оценка области, занимаемой целью на РЛИ

Выделение области, занимаемой радиолокационным портретом ПРЦ на РЛИ, представляет собой известную задачу сегментации, методам решения которой посвящен ряд работ, в частности, [3-12,13]. Традиционные алгоритмы сегментации реализуют такие методы, как пространственное дифференцирование, функциональная аппроксимация, высокочастотная фильтрация, пороговая обработка, двумерная линейная фильтрация и т.д. Практическое применение рассматриваемых методов в задаче распознавания ПРЦ на борту КА вряд ли осуществимо, в первую очередь, из-за их вычислительной сложности, с одной стороны, и из-за необходимости экспериментального подбора параметров (настройки алгоритмов с помощью оператора), с другой. Существенный недостаток

традиционных алгоритмов - недостаточное внимание к принципиальной необходимости учета флуктуации РЛИ ПРЦ, а также к формализации методов анализа их эффективности и результатам такого анализа.

Указанные недостатки могут быть преодолены при разработке алгоритма сегментации на основе статистической модели РЛИ с использованием аппарата и методологии теории статистических решений.

Хорошей моделью для РЛИ в РСА с достаточно высоким разрешением может служить двумерное поле независимых отсчетов мощности отраженного сигнала, одномерные плотности вероятности которых отличаются для отсчетов, соответствующих отражениям от фона и от поверхности ПРЦ. В первом приближении примем допущение о том, что все отсчеты фона имеют плотность вероятности $W_{\Phi}(U_{ij})$, а цели - $W_{Ц}(U_{ij})$. В этом случае оптимальный алгоритм оценивания области, занимаемой отсчетами цели, записанный по критерию максимального правдоподобия, будет иметь вид:

$$\hat{\Omega}_{Ц} = \underset{\Omega_{Ц}}{argmax} \left\{ \sum_{i,j \in \Omega_{Ц}} \ln \frac{W_{Ц}(U_{ij})}{W_{\Phi}(U_{ij})} \right\}. \quad (4.2.1)$$

Реализация алгоритма (4.2.1) является чрезвычайно трудоемкой из-за необходимости перебора всех возможных границ области, внутри которой расположена цель. Однако, с учетом статистической независимости сигналов в отдельных каналах дальности, максимум выражения в фигурных скобках (4.2.1) может быть получен, если максимизировать каждое отдельное слагаемое

$$\sum_{1 \leq [n_{1j}, n_{2j}]} \ln \frac{W_{Ц}(U_{ij})}{W_{\Phi}(U_{ij})} \quad (4.2.2)$$

для каждого канала дальности с номером j (n_{1j} и n_{2j} - граничные точки, разделяющие область фона и цели в j -м канале дальности). Таким образом, оптимальный алгоритм определения области, занимаемой целью, сводится к оптимальной оценке совокупности пар точек в каждом канале дальности, в которых происходит изменение параметра распределения отсчетов сначала в "направлении фон-цель", а затем в "направлении цель-фон".

Оптимальный по максимуму функции правдоподобия алгоритм нахождения оценок координат граничных точек \hat{n}_{1j} и \hat{n}_{2j} в j -м канале дальности принимает вид:

$$(\hat{n}_{1j}, \hat{n}_{2j}) = \underset{\substack{n_{1j}=\overline{1, M-1} \\ n_{2j}=\overline{n_{1j}+1, M}}}{argmax} \left\{ \sum_{i=n_{1j}}^{n_{2j}} \ln \frac{W_{Ц}(U_{ij})}{W_{\Phi}(u_{ij})} \right\}. \quad (4.2.3)$$

Совокупность граничных точек n_{1j} , n_{2j} при каждом значении j образуют границу области Ω , занимаемой целью соответствующего класса.

Определим структуру оптимального алгоритма для некоторых наиболее распространенных видов распределений одномерной плотности вероятности отсчетов РЛИ.

а) Распределение отсчетов РЛИ - экспоненциальное:

$$W(u_{ij}) = \sigma^{-1} \exp(-\sigma^{-1} U_{ij}), \quad (4.2.4)$$

причем его параметр σ пропорционален удельной ЭПР цели (σ_2) или фона (σ_1) в зависимости от того, расположен ли соответствующий отсчет в области цели $\Omega_{Ц}$ или фона $\Omega_{Ф}$. При известных априори значениях параметров σ_1 и σ_2 алгоритм (4.2.3) может быть записан в виде:

$$(\hat{n}_{1j}, \hat{n}_{2j}) = \underset{\substack{n_{1j}=\overline{1, M-1} \\ n_{2j}=\overline{n_{1j}+1, M}}}{\operatorname{argmax}} \left\{ (n_{2j} - n_{1j}) \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - (\sigma_2^{-1} - \sigma_1^{-1}) \sum_{i=n_j}^{n_{2j}} U_{ij} \right\}. \quad (4.2.5)$$

При неизвестных значениях параметров σ_1 и σ_2 функция правдоподобия в каждом канале дальности может быть определена по формуле (4.2.5), где вместо названных параметров используются их максимально правдоподобные оценки при каждом возможном значении координат граничных точек n_1 и n_2 . В этом случае алгоритм оценки координат граничных точек принимает вид:

$$\begin{aligned} (\hat{n}_{1j}, \hat{n}_{2j}) = \underset{\substack{n_{1j}=\overline{2, M-2} \\ n_{2j}=\overline{n_{1j}+1, M-1}}}{\operatorname{argmax}} \left\{ -(n_{1j} - 1) \ln \left[(n_{1j} - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_{1j}-1} U_{ij} \right] - \right. \\ \left. -(n_{2j} - n_{1j} - 1) \ln \left[(n_{2j} - n_{1j} - 1)^{-1} \sum_{i=n_j}^{n_{2j}} U_{ij} \right] - \right. \\ \left. -(M - n_{2j}) \ln \left[(M - n_{2j})^{-1} \sum_{i=n_{2j}+1}^M U_{ij} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

и может быть назван адаптивным по отношению к параметрам распределения.

б) Распределение отсчетов РЛИ - гамма-распределение:

$$W(u_{ij}) = \frac{\gamma^n}{\Gamma(\eta)} u_{ij}^{\eta-1} \exp(-\gamma U_{ij})$$

с параметрами γ_2 , η_2 в области цели и параметрами γ_1 , η_1 в области, занятой фоном.

Рассмотрим два варианта:

1) на границе областей изменяется только параметр масштаба $\gamma(\eta_2 = \eta_1 = \eta)$. В этом случае алгоритм оценки граничных точек имеет вид:

$$(\hat{n}_{1j}, \hat{n}_{2j}) = \underset{\substack{n_{1j}=\overline{1, M-1} \\ n_{2j}=\overline{n_{1j}+1, M}}}{\operatorname{argmax}} \left\{ \eta_0(n_{2j} - n_{1j}) \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - (\gamma_2 - \gamma_1) \sum_{i=n_{1j}}^{n_{2j}} U_{ij} \right\}; \quad (4.2.7)$$

2) на границе областей изменяется только параметр формы η ($\gamma_2 = \gamma_1 = \eta_0$). Алгоритм выглядит следующим образом.

$$\begin{aligned} (\hat{n}_{1j}, \hat{n}_{2j}) = \underset{\substack{n_{1j}=\overline{1, M-1} \\ n_{2j}=\overline{n_{1j}+1, M}}}{\operatorname{argmax}} \left\{ (n_{2j} - n_{1j}) \left[\ln \frac{\Gamma(\eta_1)}{\Gamma(\eta_2)} + (\eta_2 - \eta_1) \ln \gamma_0 \right] + \right. \\ \left. + (\eta_2 - \eta_1) \sum_{i=n_{1j}}^{n_{2j}} \ln U_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Реализация рассмотренных алгоритмов не требует операций более сложных, нежели простое суммирование отсчетов РЛИ.

4.3. Оценка ракурса цели

Если определение области, занятой целью на РЛИ, представляет интерес при обучении алгоритма, формировании радиолокационных портретов ПРЦ и при достаточно большом отношении сигнал/фон, реализуемом на практике, может быть игнорировано, (отсчеты фона при верно выбранном пороге практически отсутствуют), то оценка ракурса в режиме эксплуатации алгоритма классификации принципиально необходима, ибо со сменой ракурса существенным образом меняется как интегральная ЭПР ПРЦ, так и ее индивидуальный радиолокационный портрет, что требует в общем случае обращения к вполне определенным (полученным при том же ракурсе) радиолокационным портретам из базы данных. Рассмотрим возможность оценки ракурса по ориентации контура ПРЦ (см. рис.4.3). На рисунке показана условная область цели на РЛИ в координатах дальность-азимут. Продольная ось цели, которая в случае наблюдения ПРЦ совпадает с осью симметрии, у целей названного класса достаточно ярко выражена, поэтому ракурсом здесь и далее считаем угол наклона продольной оси к азимутальной координате φ . При известном угле азимута цели θ_H ракурс определяется суммой

$$\varphi = \varphi_1 + \theta_H - \frac{\pi}{2} \pm \pi$$

Слагаемое $\pm\pi$ вызвано неоднозначностью при оценке ракурса ПРЦ по ориентации его продольной оси.

Реальное радиолокационное изображение ПРЦ при его дискретизации по дальности и азимуту представляет собой совокупность точек так или иначе группирующихся вдоль продольной оси ПРЦ. Определение углового коэффициента такой прямой можно осуществить множеством способов, основанных на вычислении минимумов расстояний между точками и прямой, вычисленными в той или иной метрике. Всем этим методам в той или иной мере присущ общий недостаток, состоящий в том, что аномальные точки, расположенные далеко от прямой, дают наибольший вклад в формируемую сумму (расстояние до них самое большое) и оценка ракурса производится с заметной ошибкой. От названного недостатка свободен метод преобразований Хафа (кластерного анализа). Оставляя вопрос об эффективности различных методов до раздела, посвященного сравнительному анализу, рассмотрим содержание алгоритма Хафа. В результате работы алгоритма оценки граничных точек в каждом канале дальности (азимута) после дискретизации РЛИ ПРЦ образуется совокупность точек, большинство которых (за исключением аномальных, созданных фоном) группируется вдоль продольной оси ПРЦ, угловой коэффициент которой и является предметом оценки. Каждой точке с координатами x_i, y_i на плоскости XOY ставится в соответствие кривая $p_i(\theta)$ на плоскости θ, p . Методом пересчета служит нормальное уравнение прямой [83]:

$$x_i \cos \theta + y_i \sin \theta = p \quad (4.3.1)$$

В результате построения множества кривых для каждой точки x_i, y_i образуются области "сгущения" (кластеры), иначе говоря, области, через которые проходит большинство кривых. Точке центра такого кластера соответствует прямая, проходящая через большинство выделенных точек на плоскости РЛИ, при этом аномальные точки автоматически селективируются.

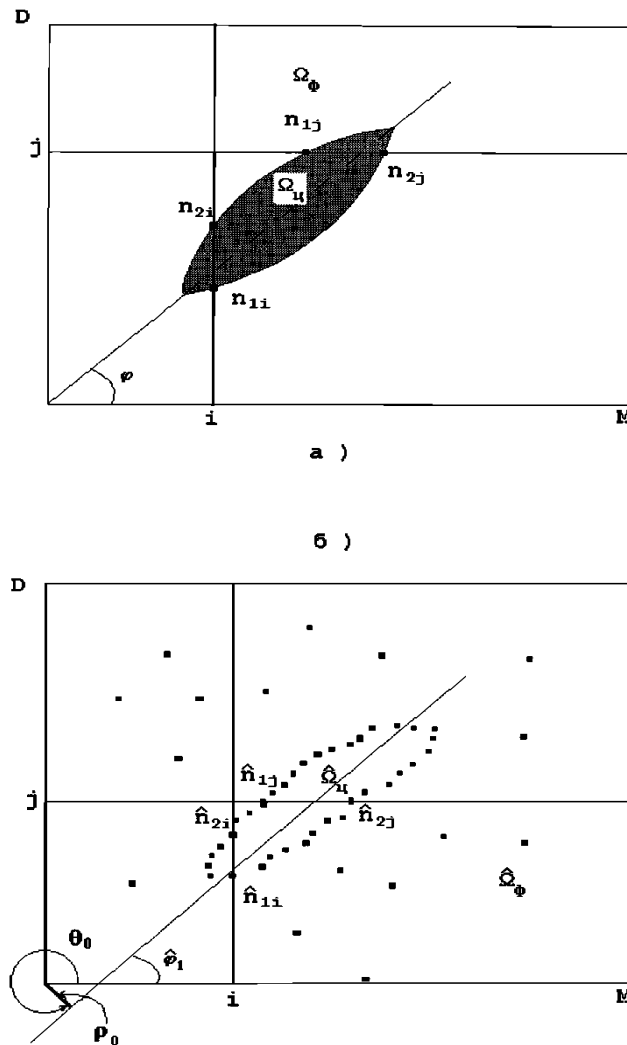


Рис. 4.3. К выводу алгоритмов оценки области РЛИ, занимаемой ПРЦ, и ракурса цели

4.4. Анализ алгоритмов оценки координат граничных точек между областями РЛИ с отличающимся контрастом

Эффективность алгоритмов оценки координат граничных точек производилась методом статистического моделирования. Названным методом генерировалось выборочное РЛИ в одном канале дальности, содержащее 100 случайных отсчетов, первая половина которых имела плотность вероятности с одним параметром (σ_1), а вторая половина - с другим (σ_2). Величина ошибки Δ_n рассчитывалась как сумма смещения и среднеквадратичного отклонения оценки координаты точки изменения параметра (вычисленная в количестве отсчетов РЛИ, что эквивалентно количеству элементов разрешения). На рис.4.4. показана зависимость ошибки от величины отношения ЭПР цели и фона в одном элементе разрешения ($q = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$). Зависимости получены для следующих распределений отсчетов: 1.- гамма-распределение, 2.- экспоненциальное распределение (с известными априори параметрами) и 3. - экспоненциальное распределение с

неизвестными параметрами. Из приведенного рисунка следует, что качество алгоритмов оценки граничных точек существенно зависит от вида распределения отсчетов РЛИ, причем названная зависимость тем сильнее, чем меньше радиолокационный контраст между поверхностью цели и МП. При этом экспоненциальное распределение представляет собой наименее благоприятную ситуацию для качественного воспроизведения цели. Однако, при контрасте более 8ДБ качество оценки координат граничных точек практически не зависит от вида распределения отсчетов и от наличия априорной информации об их параметрах. Адаптивный алгоритм в условиях произведенного моделирования практически не уступает оптимальному.

Зависимость ошибки Δ_n от общего количества отсчетов показана на рис.4.6. Очевидно, что уменьшение размеров фрагмента РЛИ, по которому принимается решение о наличии и координате скачка ЭПР, приводит к возрастанию ошибки. Кроме того, ошибка растет тем больше, чем дальше расположена точка скачка ЭПР от середины фрагмента, поскольку уменьшается число отсчетов и, следовательно, качество оценки одного из параметров распределения (рис.4.7.). Улучшение оценки второго параметра не компенсирует потерь, возникающих при оценке первого (При расположении скачка на краях фрагмента ошибка существенно выше).

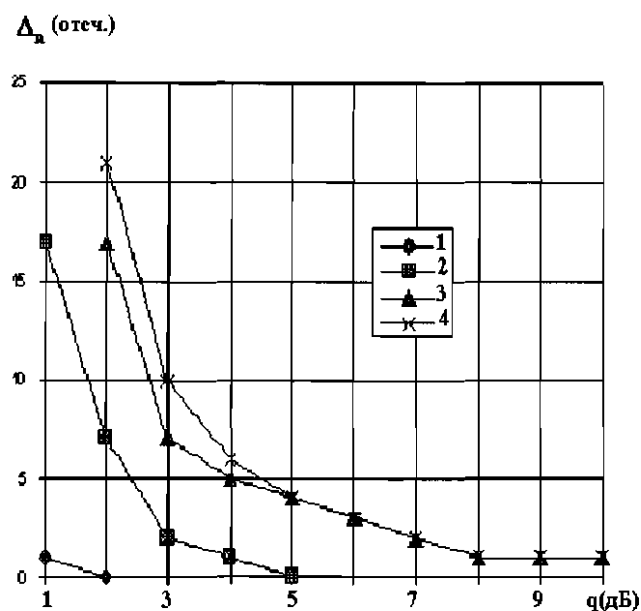


Рис. 4.4. Средняя ошибка оценки координат граничных точек контура цели в зависимости от среднего радиолокационного контраста при нормальном распределении отсчетов РЛИ (1), гамма-распределении (2), экспоненциальном с известными (3) и неизвестными (4) параметрами

На рис.4.5 показана оценка контура цели на РЛИ размером 100*100. Распределение отсчетов - экспоненциальное, алгоритм адаптивный.

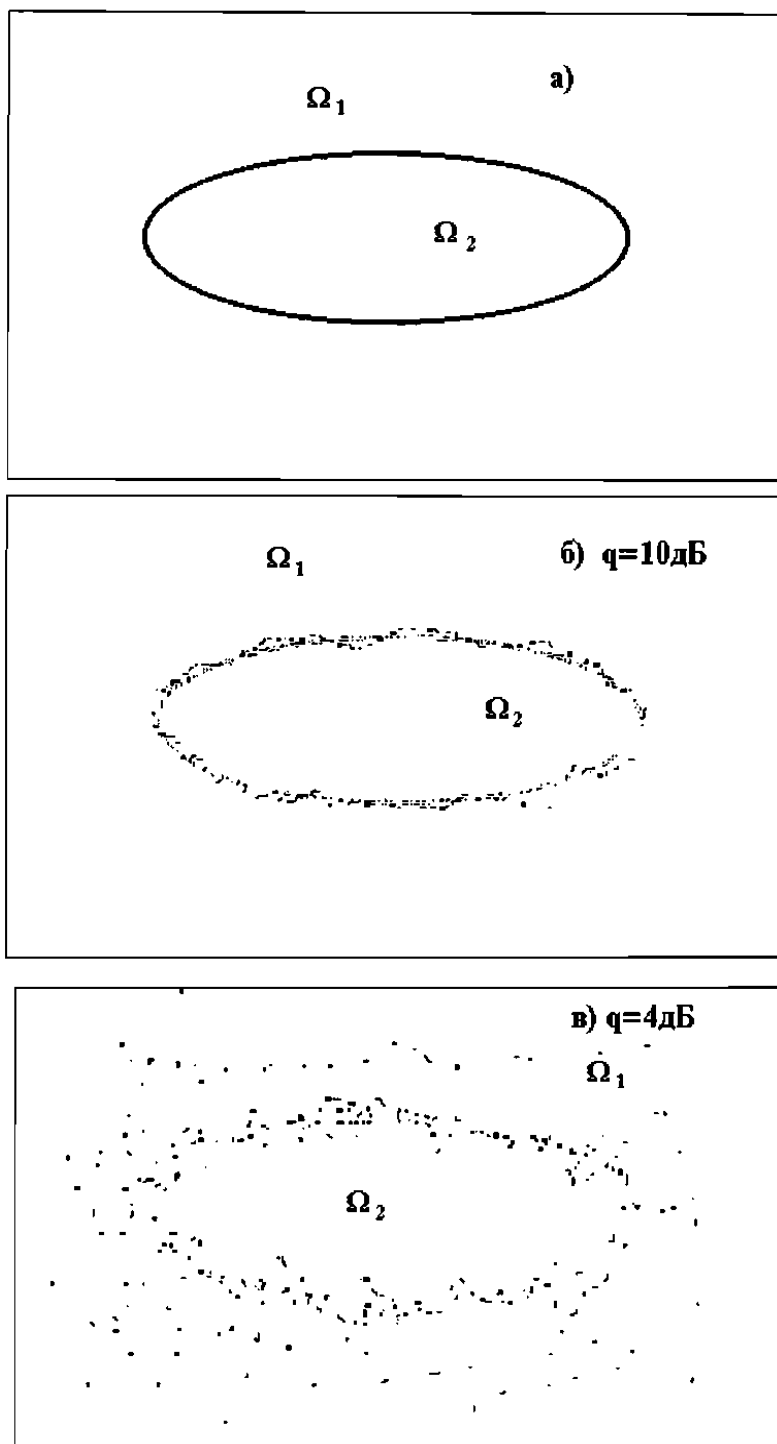
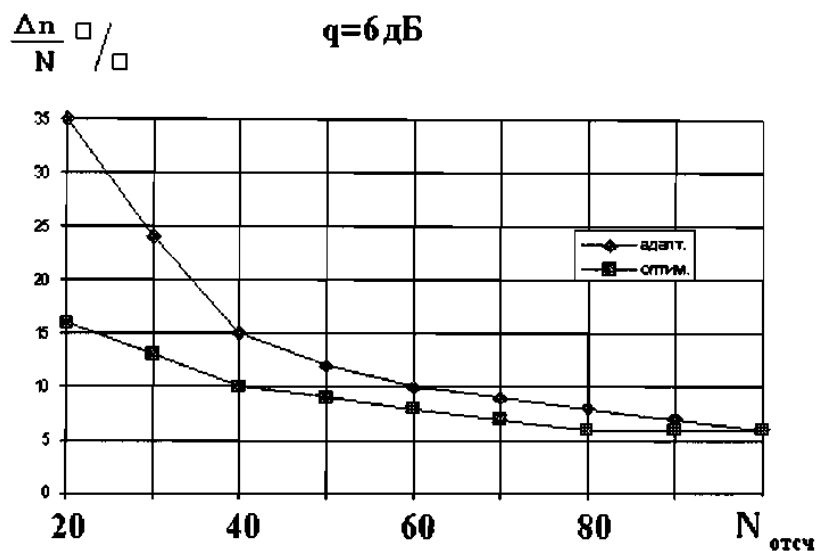


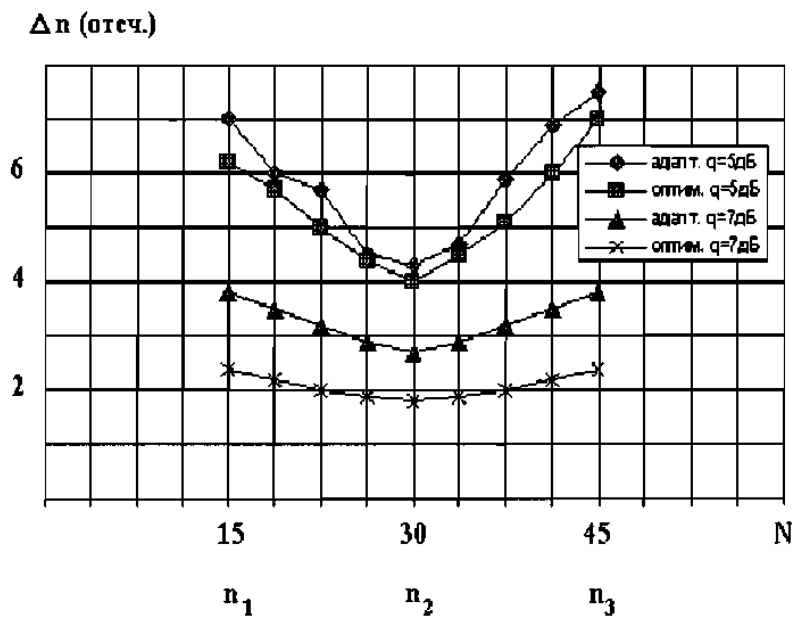
Рис.4.5. Пример оценки контура цели (а) адаптивным алгоритмом при двух значениях среднего радиолокационного контраста

Зависимость ошибки Δ_n от общего количества отсчетов показана на рис.4.6. Очевидно, что уменьшение размеров фрагмента РЛИ, по которому принимается решение

о наличии и координате скачка ЭПР, приводит к возрастанию ошибки. Кроме того, ошибка растет тем больше, чем дальше расположена точка скачка ЭПР от середины фрагмента, поскольку уменьшается число отсчетов и, следовательно, качество оценки одного из параметров распределения (рис.4.7.). Улучшение оценки второго параметра не компенсирует потерь, возникающих при оценке первого (При расположении скачка на краях фрагмента ошибка существенно выше).



а)



б)

Рис. 4.6. Зависимость ошибок оценки координат точек контура от размеров фрагмента (а) и расположения точек (б)

Для оценки длины цели в одном канале РЛИ определялись координаты двух точек изменения параметров РЛИ (начальной и конечной). Зависимость ошибки оценки длины Δ_L от величины отношения параметров q показана на рис. 4.7. Ошибка Δ_L вычислялась как сумма смещения и среднеквадратического отклонения длины цели в одном канале (усреднение производилось по 50 испытаниям). Из рисунка следует, что эффективность оптимального и адаптивного алгоритмов практически одинакова и составляет величину порядка одного отсчета при контрасте порядка 6-7дБ.

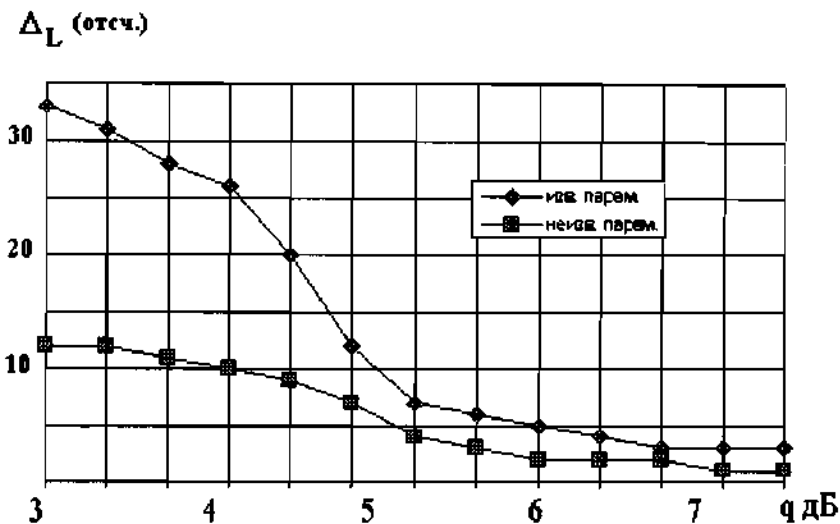


Рис. 4.7. Ошибка оценки протяженности РЛИ цели в одном канале от величины среднего радиолокационного контраста при известных и неизвестных параметрах $\sigma_1 \sigma_2$

4.5. Межобзорная идентификация РЛИ ПРЦ

Решение задачи классификации по одному наблюдению может оказаться недостаточно достоверным вследствие искажений РЛИ, вызванных его флуктуациями и рядом других причин особенно при большой мощности сигнала, отражённого от подстилающей поверхности. В таких случаях эффективность решения задачи может быть повышена за счет применения комплексного распознавания несколькими решающими автоматами (РА).

В связи с тем, что каждый РА содержит в своем банке наблюдаемых данных несколько РЛИ различных целей, возникает проблема их идентификации, иначе говоря, ответа на вопрос, какие конкретные фрагменты, содержащие отметки от целей в каждом из P различных обзоров, принадлежат одному и тому ПРЦ.

Предположим, что каждое j -е РЛИ, полученное в p -м обзоре, представлено вектором $\bar{U}_{pj} = \|U_{pj}^i\|, (p = \overline{1, P}; j = \overline{1, M}; i = \overline{1, N})$, размерность которого N выбрана таким образом чтобы РЛИ ПРЦ наибольшего размера полностью размещалось в пределах

заданного фрагмента МП. Нумерация фрагментов, наблюдаемых на радиолокационной карте (содержащихся в банке данных) производится по заданному правилу (в примере, показанном на рис. 4.8 слева - направо, сверху - вниз). При этом общая совокупность РЛИ, подлежащих идентификации, имеет вид:

$$\{U_{11}^1, \dots, U_{11}^N; \dots U_{1M}^1, \dots, U_{1M}^N; \dots U_{pj}^1, \dots, U_{pj}^N; \dots U_{p1}^1, \dots, U_{p1}^N; \dots U_{pM}^1, \dots, U_{pM}^N\}, \quad (4.5.1)$$

где первый индекс p - номер обзора;

второй индекс j - номер РЛИ в p -м обзоре;

третий индекс i - номер отсчета j -го РЛИ p -го обзора. Пусть j -е РЛИ определено вектором параметров $\bar{l}_{p\alpha_j^p}$ ($p = \overline{1, P}$; $\alpha_j^p = \overline{1, M}$), где p - по-прежнему номер обзора, а α_j^p - истинный порядковый номер ПРЦ, соответствующего j -му РЛИ в p -м обзоре. Компонентами вектора $\bar{l}_{p\alpha_j^p}$ являются все доступные для анализа параметры объекта, в частности, статистические характеристики отсчетов РЛИ (математические ожидания, дисперсии и т.п.), траекторные параметры (координаты, скорости поступательного и вращательного движений и т.д.), оценки ЭПР, размеров и т.п.

Цель идентификации заключается в отыскании оптимальной в рамках выбранного критерия оценки совокупности векторов $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M$, у которых каждая компонента $\hat{\alpha}_j^p$ представляет собой оценку истинного номера j -й цели в p -м обзоре. На уже упоминавшемся примере (рис.4.8) условно показаны карты анализируемой поверхности в трех последовательных обзорах. На каждой из этих карт расположены три РЛИ ПРЦ, которые условно изображены в виде треугольника, квадрата и круга. При простейшей идентификации целей (например, по минимуму изменения расстояния от отметки в предыдущем обзоре) второй и третий ПРЦ во втором обзоре будут перепутаны (они поменялись местами за счет перемещения по неизвестным для наблюдателя траекториям, изменения ракурса, траектории ИСЗ и т.п.). Правильное же решение должно иметь вид:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1^1 &= \hat{\alpha}_1^2 = \hat{\alpha}_1^3 = 1; \\ \hat{\alpha}_2^1 &= \hat{\alpha}_2^3 = 2; \hat{\alpha}_2^2 = 1; \\ \hat{\alpha}_3^1 &= \hat{\alpha}_3^3 = 3; \hat{\alpha}_3^2 = 2; \end{aligned}$$

Общее число возможных гипотез об истинном расположении ПРЦ в пределах анализируемых карт акватории, полученных при P обзорах, равно $P \cdot M!$. Если для каждой из гипотез может быть записана ее апостериорная плотность вероятности, то решения следует принимать по ее максимуму:

$$\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M = \arg \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_M} W(\bar{U}_{11}, \dots, \bar{U}_{1M} / \bar{l}_{1\alpha_1^1}, \dots, \bar{l}_{p\alpha_M^p}) \quad (4.5.2)$$

В тех случаях, когда векторы параметров $\bar{l}_{p\alpha_j^p}$ априори неизвестны, их значения в должны быть заменены соответствующими оценками максимального правдоподобия, полученными в предположении о справедливости проверяемой гипотезы.

Проиллюстрируем решение названной задачи на примере флуктуационных РЛИ ПРЦ, причем при идентификации отсутствует какая-либо априорная информация за исключением того факта, что отсчеты РЛИ независимы и распределены по экспоненциальному закону, что соответствует выборочным отсчетам мощности. В этом случае параметры $l_{p\alpha_j^p}^i = \sigma_{\alpha_j}^i$ представляют собой дисперсии соответствующих отсчетов.

Алгоритм принимает вид:

$$\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M = \arg \max_{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M} \left\{ \prod_{p=1}^P \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{\alpha_j}^i} \exp \left(-\frac{U_{pj}^i}{\sigma_{\alpha_j}^i} \right) \right\} \quad (4.5.3)$$

Поскольку значения мощностей отдельных отсчетов априори неизвестны и при решении задачи идентификации отсутствует возможность их определения откуда-либо, кроме как из наблюдаемой совокупности РЛИ различных ПРЦ, воспользуемся максимально правдоподобными оценками неизвестных мощностей:

$$\hat{\sigma}_{\alpha_j}^i = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P U_{p\alpha_j^p}^i \quad (4.5.4)$$

После подстановки (4.5.4) в (4.5.3) и (4.5.2) и логарифмирования получаем алгоритм идентификации РЛИ ПРЦ при межобзорном наблюдении:

$$\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M = \arg \min_{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M} \left\{ \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\frac{U_{pj}^i}{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P U_{p\alpha_j^p}^i} + \ln \left(\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P U_{p\alpha_j^p}^i \right) \right] \right\} \quad (4.5.5)$$

Для анализа эффективности предлагаемого правила рассмотрен пример идентификации двух РЛИ ПРЦ (M=2), которые моделировались в 4 (P=4) последовательных обзорах. РЛИ ПРЦ не отличались по величине удельной ЭПР, но отличались размерами (при общем размере радиолокационной карты 100x100 элементов разрешения площадь первого РЛИ - 5x5, а второго - 4x4 элементов разрешения). Положение центра РЛИ ПРЦ на карте в каждом обзоре моделировалось равновероятным при условии, что контуры РЛИ не пересекаются.

Таким образом, в каждом отдельном испытании были реализованы восемь конкурирующих гипотез о порядке последовательного размещения РЛИ на карте акватории.

Зависимости вероятностей ошибок от отношения сигнал/фон приведены на рис.4.9, откуда, в частности, следует, что две цели с одинаковыми ЭПР (наихудший для практики случай) и отличающиеся по линейным размерам приблизительно на 25% идентифицируются с вероятностью ошибки не более 0.1 при отношении сигнал/фон порядка 20дБ.

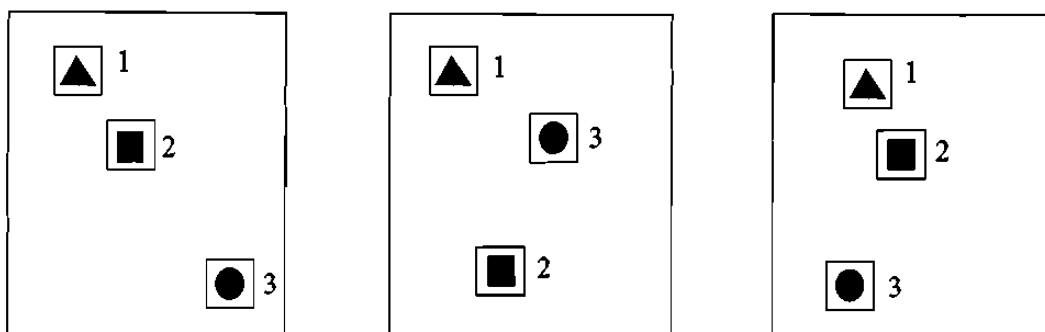


Рис. 4.8. Карты поверхности с РЛИ трех разных ПРЦ

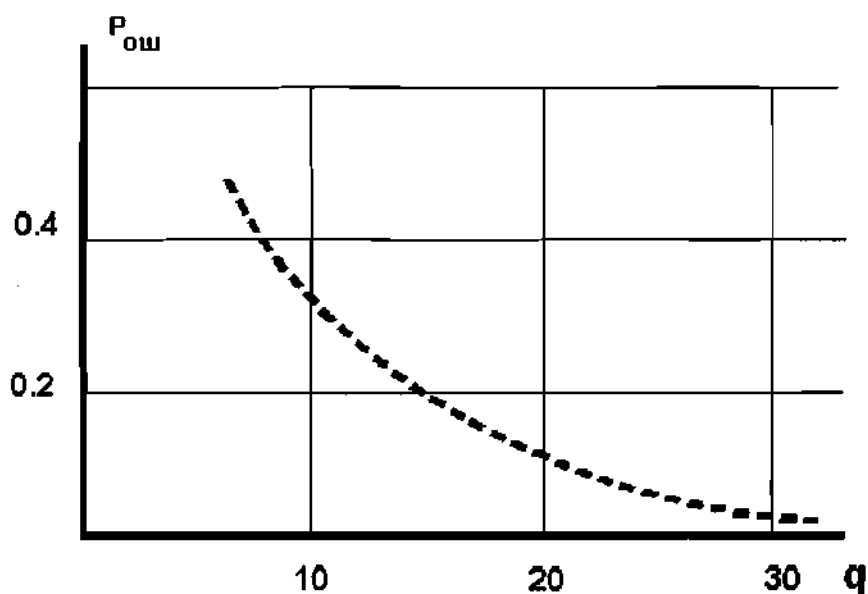


Рис. 4.9. Вероятность ошибки идентификации

4.6. Оценка радиолокационного портрета ПРЦ

Проблема создания банка данных РЛИ ПРЦ является основной при реализации алгоритма классификации, поскольку именно от количества и достоверности априорной информации зависит в конечном счёте эффективность решения задачи в целом.

В данном разделе рассматривается алгоритм многомерной оценки амплитуд отражённых сигналов и угловых координат их источников, реализующий многоканальную (по числу пеленгуемых источников) итеративную процедуру измерения

по методу максимального правдоподобия и отличающийся сравнительно несложной технической реализацией [14].

Предположим, что наблюдение поля сигналов и помех производится эквидистантной антенной решеткой, длина которой L , а число приемных элементов M . Тот факт, что названная решётка создаётся в виде искусственного раскрыва, не оказывает влияния на решение задачи, так как в течение времени синтеза параметры отражённых сигналов остаются практически неизменными, а это значит, что и принимаемые комплексные амплитуды остаются в пределах интервала синтеза неизменными. Очевидно, что принимаемые комплексные амплитуды в каждой точке траектории должны запоминаться на всё время работы алгоритма. При N источниках сигналов, находящихся в дальней зоне приемной антенны и отличающихся своими комплексными амплитудами f_i и угловыми направлениями $\Theta_i (i=1, N)$, вектор комплексных амплитуд в элементах решетки может быть представлен в виде

$$U = \sum_{i=1}^n f_i S(\mu_i) + N \quad (4.6.1)$$

где
$$S(\mu_i) = \|S_i(\mu_i)\| = \left\| \exp \left[-j \frac{4\pi}{N-1} l \mu_i \right] \right\|; \mu_i = \frac{L}{\lambda} \sin \Theta_i \quad (4.6.2)$$

- нормированная угловая координата i -го источника (λ - длина волны); N – вектор комплексных амплитуд помехи в элементах антенны.

Считая амплитуды отражённых сигналов и угловые координаты источников неслучайными неизвестными величинами, помеху гауссовой с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $R_{\text{ш}} = M\{NN^*\}$, запишем функцию правдоподобия для неизвестных параметров сигналов f_i и $\mu_i (i=1, N)$:

$$P\{U / f_1, \dots, f_n; \mu_1, \dots, \mu_n\} = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [U - \sum f_i X(\mu_i)]^{*T} R_{\text{ш}}^{-1} [U - \sum f_i X(\mu_i)] \right\} \quad (4.6.3)$$

где $*$ - знак эрмитова сопряжения.

Преобразуем показатель (4.6.3) таким образом, чтобы выделить член, зависящий от амплитуды и угловой координаты только одного, например, m -го источника:

$$L_m = \frac{1}{2} |f_m|^2 S^{*\dot{\circ}}(\mu_m) R_{\text{ш}}^{-1} S(\mu_m) - f_m U_m^{*T} R_{\text{ш}}^{-1} S(\mu_m) + F_m(f_1, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots, f_N; \mu_1, \dots, \mu_{m-1}, \mu_{m+1}, \dots, \mu_N) \quad (4.6.4)$$

где
$$U_m = U - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n f_i S(\mu_i); \quad (4.6.5)$$

$F_m(\bullet)$ - функция, не зависящая от f_m и μ_m .

Для определения оценок максимального правдоподобия амплитуды и угловой координаты m -го отражающего элемента необходимо отыскать минимум выражения (4.6.4) по названным переменным. Преобразовав (4.6.4) к виду

$$L_m = S^{*T}(\mu_m)R_\theta^{-1}S(\mu_m) \left| f_m - \frac{U_m^{*T}R_\theta^{-1}S(\mu_m)}{S^{*T}(\mu_m)R_\theta^{-1}S(\mu_m)} \right|^2 - \frac{|U_m^{*T}R_\theta^{-1}S(\mu_m)|^2}{S^{*T}(\mu_m)R_\theta^{-1}S(\mu_m)} + F_m \quad (4.6.6)$$

замечаем что, максимум функции правдоподобия имеет при условии

$$\hat{f}_m = \frac{U_m^{*T}R_\theta^{-1}S(\mu_m)}{S^{*T}(\mu_m)R_\theta^{-1}S(\mu_m)} \quad (4.6.7)$$

Подставляя найденную оценку амплитуды (4.6.7.) в выражение (4.6.4) и дифференцируя по μ_m , получаем уравнение правдоподобия для оценки углового направления

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{U_m^{*T}R_\theta^{-1}VS(\mu_m)}{U_m^{*T}R_\theta^{-1}S(\mu_m)} \right\} \Big|_{\mu_m=\hat{\mu}_m} = 0 \quad (4.6.9)$$

где $V = 2\pi j / (N-1) \operatorname{diag}(1, 2, \dots, N)$ - диагональная матрица.

Уравнение (4.6.8) легко решается численными методами, либо разложением в степенной ряд в окрестности оцениваемого значения.

Оценки параметров других сигналов находятся аналогично, причем перед оценкой m -го сигнала по формулам (4.6.7), (4.6.8) используются соответствующие оценки всех остальных $n-1$ сигналов с целью компенсации «мешающих» для текущей оценки сигналов во входных данных m -го канала измерения.

Структурная схема оптимального алгоритма (рис. 4.10) состоит из n перекрестно связанных каналов, в каждом из которых производится вычитание оценок мешающих сигналов, полученных в соседних каналах, измерение «своих» параметров f и μ формирование оценки $\hat{f}S(\hat{\mu})$ «своего» сигнала, которая используется для соответствующей компенсации в других каналах.

Эффективность алгоритма исследовалась методом статистического моделирования на примере решения задачи измерения координат двух источников с угловыми направлениями $\mu_1 = 0,2$ и $\mu_2 = -0,2$, что соответствует их разнесению на 0,23 ширины диаграммы направленности антенной решетки по нулям (рис. 4.11). В качестве начальных условий задавались значения $\mu_{0,1,2} = \pm 0,1$ (кривая 1), $\mu_{0,1,2} = \pm 0,05$ (кривая 2), $\mu_{0,1,2} = \pm 0,01$ (кривая 3). Шумы в элементах решетки некоррелированы. Отношение амплитуды сигнала

к СКО шума 20 дБ. Оценки координат сходятся к истинным после 15...20 итераций при отличии заданных значений координат от начальных условий алгоритма в 10 и более раз.

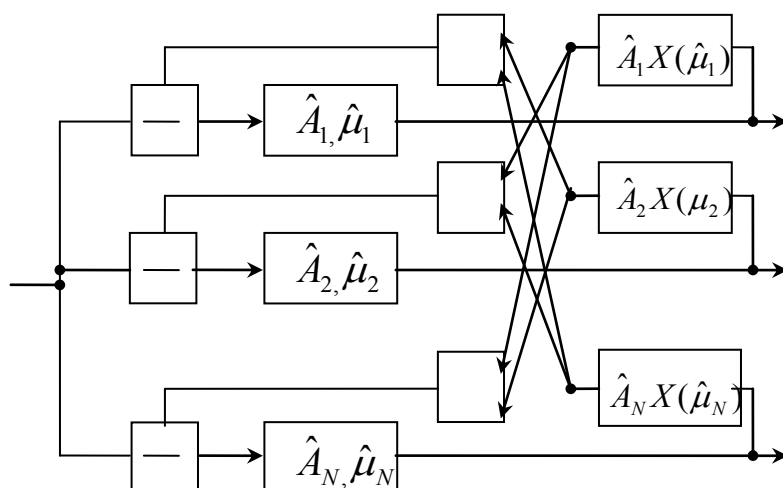


Рис. 4.10. Структурная схема измерений

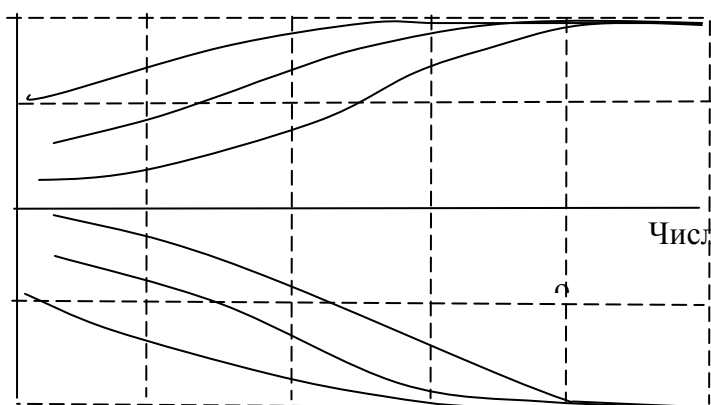


Рис.4.11. Сходимость оценок координат источников

Таким образом, даже в тех случаях, когда сигналы не разрешаются по углу (в смысле релейского критерия) при отношениях сигнал — шум, не существенно превышающих порог обнаружения, рассматриваемый алгоритм позволяет производить совместное измерение угловых координат при низких требованиях к точности установки начальных условий.

Литература к главе 4

1. Большаков И.А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума / И.А. Большаков. М.: Сов. радио 1969.464с.
2. Доросинский Л.Г. Измерение общегрупповых параметров потока сигналов / Л.Г. Доросинский, С.П. Литвиненко, Л.Н. Шалимов // Естественные и технические науки №4(54) г Москва. 2011.
3. Прэтт У.К. Цифровая обработка изображений / У.К.Прэтт. М.: Мир, 982с.

4. Денисов Д.А. Сегментация изображений на ЭВМ / Д.А.Денисов, В.А.Низовкин // Зарубежная радиоэлектроника. 1985. N 10. с.5-30.
5. Розенфельд А. Сегментация и модели изображений / А. Розенфельд, Л.С. Де йвис. ТИИЭР. 1979. Т.67. N5. с.9-39.
6. Джайн А.К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений / А.К.Джайн. ТИИЭР. 1981. т. 69. N5. с. 9-39.
7. Террайн Ч.У. Алгоритмы анализа изображений, основанные на статистических моделях / Ч.У. Террайн, Т.Ф. Куатьери, Д.Е. Даржон. ТИИЭР. 1986. т.72. N 4. с.4-26.
8. Методы сегментации изображений / под ред. П.А. Бакута, В.Г. Лабунца. Тематический обзор. ч.1. Изд-во УПИ им. С.М. Кирова. 1986. 127с.
9. Бакут П.А. Сегментация изображений: методы выделения границ областей / П.А. Бакут, Г.С. Колмогоров // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. N10. с.25-47.
10. A survey of thresholding techniques / Sahoo P.K., Soltani S., Wong A.K.S., Chatterjee Y.C.// Comput Vision, Graphics and Image Processing. 1988. 41 . N 2. p.233-260.
11. Kundi Amlan, Mitza Sanjwet K. A new algorithm for image edge extraction using a statistical classifier approach//IEEE Trans.Pattern Anal, and Mach. Intell 1987. т.9. N 4. p.569-577.
12. Wang Davig L. Knowledge based object detection us images // ICASSP - 87, Proc. Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Process., Dallas, Tex., Apr. 6-9,, 1987, vol. 1. New York. 1987. p.269-272.
13. Доросинский Л.Г. Анализ адаптивного алгоритма обнаружения контуров на малококонтрастных радиолокационных изображениях / Л.Г.Доросинский, Т.М.Лысенко // Исследование земли из космоса.1988. N2. с.99-103
14. Доросинский Л.Г. Выбор метода совместного измерения угловых координат нескольких источников излучения / Л.Г.Доросинский. Радиотехника. 1987. N 11. с.43-45.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	4
1.1. Проверка простых гипотез.....	4
1.2. Критерии минимума среднего риска (критерии Байеса).....	4
1.3. Многоальтернативная проверка гипотез	8
1.4. Случай многих классов	10
1.5. Вероятности ошибок и интегралы ошибок	11
1.6. Правило принятия решения при нормальной плотности вероятностей признаков.....	11
1.7. Оценка параметров по максимуму правдоподобия. Обучение с учителем	15
1.8. Байесовский классификатор	18
1.9. Эффективность оценки. Нижняя граница дисперсии несмещенной оценки. Неравенство Крамера-Рао.....	22
1.10. Непараметрические методы.....	25
1.10.1. Оценка плотности распределения.....	25
Парzenовские окна.....	27
Оценка методом k_n ближайших соседей	28
1.10.2. Оценка апостериорных вероятностей. Правило ближайших соседей	29
1.10.3. Аппроксимации путем разложения в ряд	30
1.10.4. Линейный дискриминант Фишера.....	33
1.10.5. Множественный дискриминантный анализ.....	36
1.11. Основные положения радиолокации распределённых целей	40
Литература к главе 1	43

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЦ ПО ДАННЫМ КОСМИЧЕСКОЙ РЛС БОКОВОГО ОБЗОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ.....	45
2.1. Математическая модель цели и отражённого сигнала при решении задач распознавания пространственно-распределённых целей в космических РЛС с синтезированной апертурой.....	45
2.2. Многоальтернативная проверка гипотез относительно различных классов ПРЦ при их наблюдении совокупностью космических радиолокационных средств.....	51
2.3. Квазиоптимальные и эмпирические алгоритмы классификации ПРЦ.....	58
2.4. Адаптивный алгоритм классификации пространственно-распределённых целей по данным радиолокатора с синтезированной апертурой	64
Литература к главе 2	72
3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ЦЕЛЕЙ ПО ДАННЫМ РЛС БО.....	73
3.1. Методика использования граничных соотношений Чернова и Кайлата для оценки эффективности классификации ПРЦ по вектору наблюдаемых данных	73
3.2. Анализ потенциальных характеристик классификации ПРЦ по вектору наблюдаемых данных	80
3.3 Методика расчета эффективности классификации ПРЦ по радиолокационному портрету	86
3.3.1 Проблема анализа эффективности алгоритмов классификации	86
3.3.2. Вывод расчетных выражений для оценки вероятностей правильных и ошибочных решений при классификации ПРЦ по РЛИ.....	90
3.3.3. Оценка эффективности классификации при корнях большой кратности.....	100
3.4. Анализ алгоритмов классификации по РЛИ ПРЦ	101
3.5. Сравнительный анализ алгоритмов классификации, основанных на векторе достаточных статистик, в условиях априорной неопределённости.....	102
3.6. Комплексное распознавание. Классификация ПРЦ по данным нескольких средств наблюдения.....	108
3.6.1. Процедуры комплексной классификации	109

3.6.2. Анализ эффективности классификации	112
3.7. Методика расчета вероятности правильного распознавания при объединении решений отдельных СН методом простого голосования	115
Литература к главе 3	116
4. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЛИ	117
4.1 Измерение общегрупповых параметров распределенной цели. Измерение координат центра РЛИ	117
4.1.1. Синтез оптимального измерителя общегруппового параметра групповой цели	117
4.1.2. Анализ эффективности алгоритма измерения координаты центра ПРЦ	121
4.2. Оценка области, занимаемой целью на РЛИ	125
4.3. Оценка ракурса цели	128
4.4. Анализ алгоритмов оценки координат граничных точек между областями РЛИ с отличающимся контрастом	130
4.5. Межобзорная идентификация РЛИ ПРЦ	134
4.6. Оценка радиолокационного портрета ПРЦ	137
Литература к главе 4	140

Научное издание

Леонид Григорьевич Доросинский

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННО-
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЦЕЛЕЙ В РСА**

Компьютерная вёрстка *Е.М. Тренихиной*

Подписано в печать 26.09.2016. Формат 60х84/16

Печать оперативная. Усл. п.л. 8,4

Тираж 500 экз. Заказ № 14-08-04.

Отпечатано с готового оригинал-макета в издательстве ЗЕБРА
432072, Россия, г. Ульяновск, ул. Жуковского, 83.